A4.1 Vektoranalysis

Definieren bzw. berechnen Sie folgende Größen und erklären Sie die Bedeutung:

1 Skalarfeld

Funktionen von mehreren Veränderlichen im Raum $f = f(x, y, z)$, bei denen jedem Punkt ein Skalar, also eine ungerichtete Größe zugeordnet wird, werden als Skalafelder bezeichnet, z.B. Temperatur $T = T(x, y, z)$ oder Druck $p = p(x, y, z)$ als Funktion des Ortes.

2 Vektorfeld

Wird jedem Punkt im Raum ein Vektor, also eine gerichtete Größe zugeordnet, werden diese Felder als Vektorfeld bezeichnet, z.B. Geschwindigkeitsfelder

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z) = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z))$$

3 Gradient eines Skalarfeldes $f = f(x, y, z)$

$$grad\ f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Bsp.:

$$f = 3 \cdot x + x \cdot e^y + x \cdot y \cdot e^z$$
$$grad\ f = \left(3 + e^y + y \cdot e^z\ ,\ x \cdot e^y + x \cdot e^z\ , x \cdot y \cdot e^z\right)$$
$$grad\ f(3,1,0) = (3 + e + 1, 3 \cdot e + 3, 3)\ = (e + 4, 3 \cdot e + 3, 3)$$

Eigenschaften:

Der Vektor $grad\ f\left(\overrightarrow{x_0}\right) \neq 0$ zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs des Feldes *f* an der Stelle $\overrightarrow{x_0} = (x_0, y_0, z_0)$, falls $grad\ f\left(\overrightarrow{x_0}\right) \neq 0$

4 Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{v} = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z),)$

$$div\, \vec{v} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

Bsp.:

$$\vec{v} = \left(x + y^2, sin\ y, x \cdot y \cdot z\right)$$
$$div\, \vec{v} = (1 + cos\ y + x \cdot y)$$
$$div\, \vec{v}(1, \pi, 2) = (1 - 1 + \pi) = \pi$$

Eigenschaften:

Stellen mit $div\, \vec{v} > 0$ werden als 'Quellen' bezeichnet, Stellen mit $div\, \vec{v} < 0$ als 'Senken'
Divergenz = Quelldichte bzw. Ergiebigkeit

5 **Rotor (**oder **Rotation)** eines Vektorfeldes $\vec{v} = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z),)$

$$rot\, \vec{v} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right)$$

Bsp.:

$$\vec{v} = \left(x + y, e^{x+y} + z, z + sin\ x\right)$$
$$rot\, \vec{v} = \left(0 - 1, 0 - cos\ x, e^{x+y} - 1\right)\ = \left(-1, -\,cos\ x, e^{x+y} - 1\right)$$
$$rot\, \vec{v}(0,8,1) = \left(-1, -1, e^8 - 1\right)$$

Eigenschaften:

Ein Vektorfeld mit $rot\,\vec{v} = \vec{0}$ heißt 'wirbelfrei. Ein Vektorfeld $\vec{v}$ ist in G genau dann ein Potentialfeld, wenn es in G wirbelfrei ist, d.h. wenn gilt $rot\,\vec{v} = \vec{0}$.

6 Nabla-Operator

Der Nabla-Operator ∇ ist ein sog. Differential-Operator zur vereinfachten Schreibweise der Operationen *grad*, *div* und *rot*.
Sind $f = f(x, y, z)$ ein Skalarfeld und $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z) = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z))$ ein Vektorfeld, dann läßt sich vereinfacht schreiben

$$\nabla f = grad\ f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$\nabla \vec{v} = div\,\vec{v} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \vec{v} = rot\,\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)$$

7 Laplace Operator

Der Laplace-Operator $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ läßt sich aus dem Nabla-Operator ableiten. Für ein Skalarfeld $f = f(x, y, z)$ gilt

$$\Delta f = div\ grad\ f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

8 Linienintegral

Ist $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$ ein Vektorfeld und $C : \vec{r} = \vec{r}(t), a \le t \le b$ eine Kurve im Definitionsbereich von $\vec{v}$, so versteht man unter dem Linienintegral von $\vec{v}$ längs der Kurve C das bestimmte Integral

$$C\int \vec{v}\, d\vec{r} := \int_a^b \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, dt$$

Ist $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$, so muß man im Vektorfeld $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z) = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z),)$ setzen: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ und dann das innere Produkt aus $\vec{v}$ und $\dot{\vec{r}}$ von $t = a$ bis $t = b$ integrieren.

Bsp.: $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z) = (2y + 3, xz, yz - x)$, $\qquad C : \vec{r} = (2t^2, t, t^3), 0 \le t \le 1$

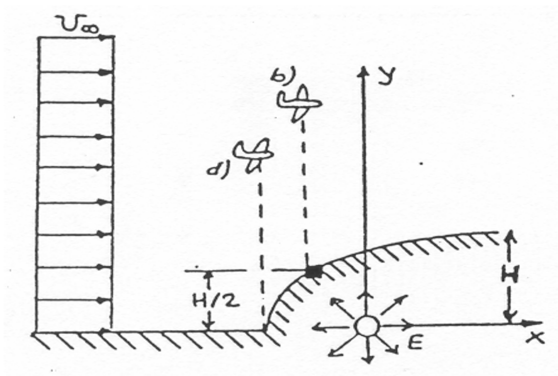
Im Vektorfeld setzen: $\qquad x = 2t^2, y = t, z = t^3$

$\vec{v}(\vec{r}(t)) = 2t + 3, 2t^5,\ t^4 - 2t^2 \qquad \dot{\vec{r}}(t) = 4t, 1, 3t^2$

$\vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = 8t^2 + 12t + 2t^5 + 3t^6 - 6t^4$

$$C\int \vec{v}\, d\vec{r} := \int_a^b \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, dt = \int_0^1 \left(8t^2 + 12t + 2t^5 + 3t^6 - 6t^4\right) dt = \frac{288}{35}$$

A4.2 Ebener Halbkörper



Ein Höhenzug besitzt die Form eines ebenen Halbkörpers und wird mit der Geschwindigkeit U_∞ angeströmt. Bei $H/2$ befindet sich eine Wetterstation.
Die Strömung stelle sich als Potentialströmung ein

U_∞ = 30 [m/s]
H = 50 [m]
p_∞ = 800 [hPa]
ρ = 1.0 [kg/m³]

a) Wie groß ist die imaginäre Quellstärke E?
b) In welcher Höhe h muß sich ein Segelflugzeug über der Wetterstation aufhalten, damit es keine Höhe verliert? Das Eigensinken des Flugzeugs beträgt v_S = 0.7 m/s
c) Wie groß ist die Druckabweichung p und $\Delta p/p_\infty$ in % und der Druckbeiwert an der Wetterstation?
d) In welcher Höhe muß das Flugzeug am Fuß des Höhenzugs fliegen, damit es nicht sinkt?

Lsg.
a) Imaginäre Quellstärke E

$$E = U_\infty \cdot D = U_\infty \cdot 2 \cdot H = 30 \cdot 2 \cdot 50 \quad \Rightarrow \quad E = 3000 \left[\frac{m^2}{s}\right]$$

b) Geschwindigkeit in y-Richtung

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{E}{2\pi} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot y \;=\; \frac{E}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \;=\; v_S = 0.7 \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$\Leftrightarrow \qquad x^2 + y^2 - \frac{E \cdot y}{2\pi \cdot v_S} = 0$$

Berechnung der x-Koordinate aus der Stromfunktion des ebenen Halbkörpers:

$$\Psi_{HK} = \frac{E}{2} = U_\infty \cdot y + \frac{E}{2\pi} \cdot \varphi$$

Wetterstation liegt bei $y = H/2$

$$\varphi = \pi - \frac{U_\infty \cdot \frac{H}{2}}{E} \cdot 2\pi \;=\; \pi \cdot \left(1 - \frac{U_\infty \cdot H}{E}\right) \;=\; \pi \cdot \left(1 - \frac{U_\infty \cdot H}{U_\infty \cdot 2 \cdot H}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \;=\; 90° \Rightarrow x = 0$$

eingesetzt in

$$x^2 + y^2 - \frac{E \cdot y}{2\pi \cdot v_S} = 0 \Rightarrow y - \frac{E}{2\pi \cdot v_S} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{3000}{2 \cdot \pi \cdot 0.7} = 682\,[m]$$

Flughöhe h über der Wetterstation

$$h = y - \frac{H}{2} = 682 - \frac{50}{2} \qquad \Rightarrow \qquad h = 657\,[m]$$

c) Druckbeiwert

$$c_p = -\frac{\sin 2\varphi}{\pi-\varphi} - \frac{\sin^2 \varphi}{(\pi-\varphi)^2} = -\frac{\sin \pi}{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi^2}{4}} \quad \Rightarrow c_p = -0.406$$

Druckabweichung und Druck an der Wetterstation

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} \cdot U_\infty^2} \Rightarrow p = c_p \cdot \frac{\rho}{2} \cdot U_\infty^2 + p_\infty \Rightarrow p = -0.406 \cdot 0.5 \cdot 30^2 + 0.8 \cdot 10^5 = 79817 [Pa]$$

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{182.7}{0.8 \cdot 10^5} = 0.2\%$$

d) Flughöhe des Segelflugzeugs

Am Fuß des Höhenzugs gilt (siehe Teilaufgabe b):

$$x^2 + y^2 - \frac{E \cdot y}{2\pi \cdot v_S} = 0$$

x_{Stpkt} berechnen:

$$D = 2 \cdot H : x_{Stpkt} = \frac{2H}{2\pi} \cdot \frac{\pi - \varphi}{\tan \varphi} \Rightarrow x_{Stpkt} = -\frac{H}{\pi}$$

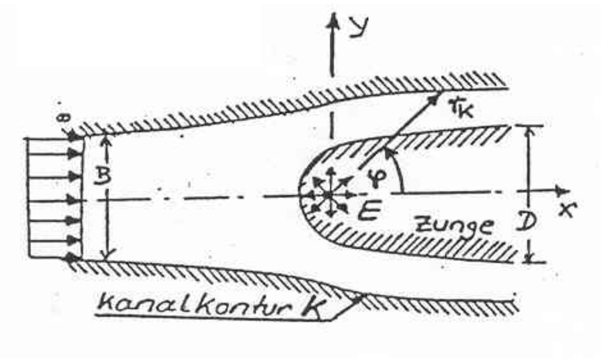
eingesetzt

$$\frac{H^2}{\pi^2} + y^2 - \frac{E \cdot y}{2\pi \cdot v_S} = 0 \Leftrightarrow y_{1,2} = \frac{E}{4\pi \cdot v_S} \pm \sqrt{\left(\frac{E}{4\pi \cdot v_S}\right)^2 - \frac{H^2}{\pi^2}}$$

$\Rightarrow$ $y_1 = 682[m],\ y_2 \approx 0$

A4.3 Ebener Halbkörper

In einem zweidimensionalen Kanal soll die Strömung in zwei gleich große Teilströme aufgeteilt werden. Dazu befindet sich an der Stelle, an der sich der Kanalquerschnitt erweitert, eine zweidimensionale Zunge. Die Kanalkontur ist so auszulegen, daß die Strömung als Überlagerung einer ebenen Translationsströmung mit einer Quellströmung, definiert werden kann.



geg.:

$D = B = 0.04$ m
$U_\infty = 25$ m/s

ges.:

a) Quellstärke E
b) Potential- und Stromfunktion in Polarkoordinaten
c) $y(\varphi \to \pi)$
d) Wie groß ist für $\varphi = \pi$ der Wert der Stromlinie der Kanalwand?
e) Gleichung der Kanalkontur K in der Form $r_K = f(\varphi)$
f) Geschwindigkeitsverteilung im Strömungsfeld $w/U_\infty = f(r/D, \varphi)$
g) Druckbeiwert c_p auf der x-Achse bei x/D = -0.16, -0.5, -1.0

Lsg.

a) Quellstärke E

$$E = D \cdot U_\infty = 1 \frac{m^2}{s}$$

b) Potential- und Stromfunktion in Polarkoordinaten

Potentialfunktion: $\Phi = \Phi_{Trans.} + \Phi_{Quelle}$ $\quad \Phi = U_\infty \cdot r \cdot \cos\varphi + \frac{E}{2 \cdot \pi} \cdot \ln r$

Stromfunktion: $\Psi = \Psi_{Trans.} + \Psi_{Quelle}$ $\quad \Psi = U_\infty \cdot r \cdot \sin\varphi + \frac{E}{2 \cdot \pi} \cdot \varphi$

c) $y_K(\varphi \to \pi)$, d.h. für $r_K \to \infty$, also weit stromaufwärts vor der Lippe, beträgt der Kanaldurchmesser B = 0.04 m, also

$$y_K(\varphi \to \pi) = \frac{B}{2} = \frac{D}{2} = \frac{E}{2 \cdot U_\infty} = 0.02\, m$$

d) Wie groß ist für $\varphi = \pi$ der Wert der Stromlinie der Kanalwand?

Stromfunktion, allg. (in Polarkoordinaten):

$$\Psi = U_\infty \cdot r \cdot \sin\varphi + \frac{E}{2 \cdot \pi} \cdot \varphi$$

Stromfunktion, Kanalwand (Translatorischer Teil in kartesischen Koordinaten):

$$\Psi_K = U_\infty \cdot y + \frac{E}{2 \cdot \pi} \cdot \varphi$$

mit $\quad y_K(\varphi \to \pi) = 0.02\, m$

folgt $\quad \Psi_K = E = 1 \frac{m^2}{s}$

e) Gleichung der Kanalkontur K in der Form $r_K = f(\varphi)$

Aus der Definition der Stromfunktion ergibt sich, daß im reibungsfreien Fall, jede beliebige Stromlinie auch als Körperkontur angenommen werden kann.

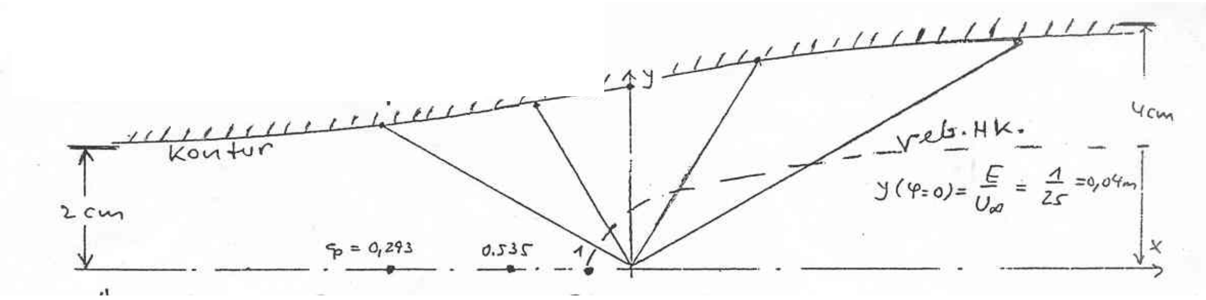
Kanalkonturgleichung, wird auch durch die Lösung aus d) erfüllt:

$$\Psi_K = U_\infty \cdot r_K \cdot \sin\varphi_K + \frac{E}{2 \cdot \pi} \cdot \varphi_K = E$$

mit $\quad U_\infty = \frac{E}{D}$

folgt $\quad \frac{r_K}{D} = \frac{1 - \frac{\varphi}{2 \cdot \pi}}{\sin\varphi} = \frac{2 \cdot \pi - \varphi}{2 \cdot \pi \cdot \sin\varphi}$

φ [°]	0	30	60	90	120	150	180
r_K/D	∞	1.833	0.96	0.75	0.77	1.17	∞
r_K [m]	∞	0.0732	0.0384	0.03	0.0308	0.0468	∞



f) Geschwindigkeitsverteilung im Strömungsfeld $w/U_\infty = f(r/D, \varphi)$, siehe 'ebener Halbkörper'

$$\left(\frac{w}{U_\infty}\right)^2 = 1 + \frac{D}{\pi \cdot r_K} \cdot \cos\varphi + \left(\frac{D}{2 \cdot \pi \cdot r_K}\right)^2$$

g) Druckbeiwert c_p auf der x-Achse bei x/D = -0.16, -0.5, -1.0, ergibt sich aus Bernoulli-Gleichung

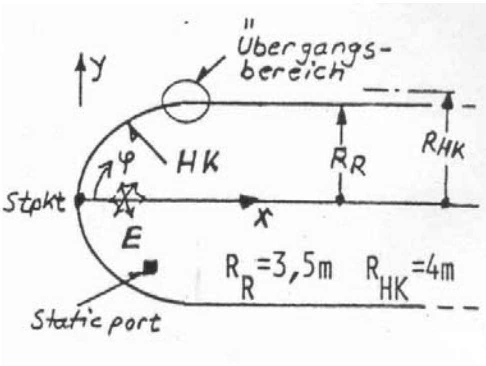
$$c_p = 1 - \left(\frac{w}{U_\infty}\right)^2 = -\frac{D}{\pi \cdot r_K} \cdot \cos\varphi - \left(\frac{D}{2 \cdot \pi \cdot r_K}\right)^2$$

mit $\quad \varphi = \pi \Rightarrow \cos\varphi = -1, \frac{r_K}{D} = -\frac{x}{D}$

folgt $\quad c_p = \frac{D}{\pi \cdot r_K} - \left(\frac{D}{2 \cdot \pi \cdot r_K}\right)^2$

x/D	-0.16	-0.5	-1.0
c_p	1.000	0.535	0.293

A4.4 Rotationssysmmetrischer Halbkörper



Vorderteil eines Flugzeugrumpfes (Radius R_R = 3.5 [m]) wird bis zum Übergangsbereich durch einen rotationssymmetrischen Halbkörper (Radius R_{HK} = 4 [m]) angenähert

ges.:

a) HK-Kontur ($\Delta\varphi$ = 20°)

b) Bestimmung einer geeigneten Stelle zur Messung des statischen Drucks

c) Wert und x-Position von $c_{p,min}$

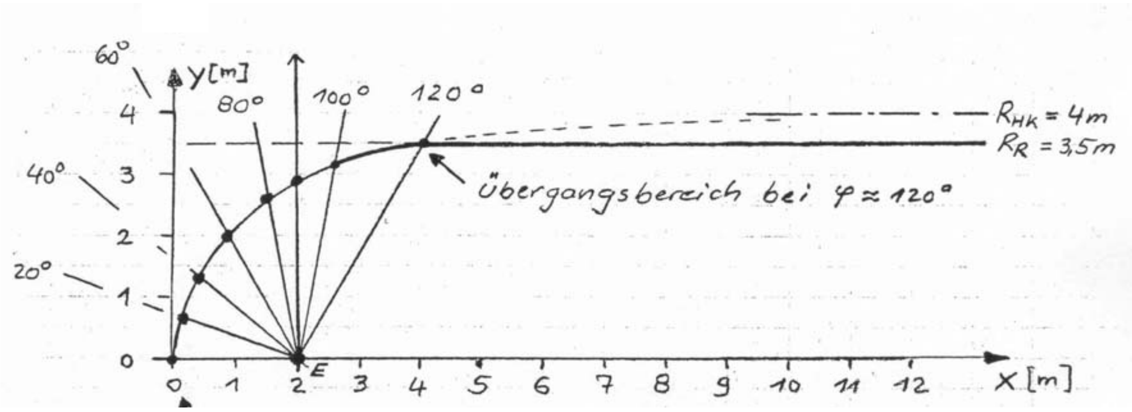
Lsg.

a) HK-Kontur ($\Delta\varphi$ = 20°)

$$r_{HK} = R_{HK} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\varphi} = 4 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\varphi}$$

Staupunkt vor der Quelle E

$$x_{Stpkt} = \sqrt{\frac{E}{4\pi \cdot U_\infty}} = \frac{R_{HK}}{2} = 2\,[m]$$



b) Bestimmung einer geeigneten Stelle zur Messung des statischen Drucks (d.h. es soll der Umgebungsdruck p_∞ gemessen werden, also $p_{HK} = p_\infty$)

$$c_p = 0 \Rightarrow c_p = \frac{p_{HK} - p_\infty}{\frac{\rho}{2} \cdot U_\infty^{\,2}} \Rightarrow p_{HK} = p_\infty$$

Druckverteilung an der Oberfläche eines Halbkörpers

$$c_p = 1 - 4 \cdot sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 3 \cdot sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Subsitution

$$\xi = sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

liefert

$$c_p = 1 - 4 \cdot \xi + 3 \cdot \xi^2 = 0 \Leftrightarrow \xi^2 - \frac{4}{3}\xi + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow \xi_{1,2} = \frac{4}{6} \pm \sqrt{\frac{16}{36} - \frac{12}{36}} \Rightarrow \xi_1 = 1,\ \xi_2 = \frac{1}{3}$$

$$\left(\xi^2 + a\xi + b = 0 \Rightarrow \xi_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \right)$$

$$\xi_1 = 1 \Rightarrow sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 1 \Rightarrow \varphi = 180°, \quad \xi_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow \varphi = 70.53°$$

Position auf der Oberfläche des Flugzeugrumpfes

$$r_{HK} = R_{HK} \cdot \frac{sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{sin\,\varphi} = 4 \cdot \frac{sin(35.26)}{sin\,(70.53)} = 2.45\,[m]$$

$$x = x_{Stpkt} - r_{HK} \cdot cos\,\varphi = 2.0\,[m] - 2.45\,[m] \cdot cos(70.53°) = 1.183\,[m]$$

c) Minimaler Druckbeiwert

Extremwertbestimmung der Druckverteilung liefert

$$c_p = 1 - 4 \cdot sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 3 \cdot sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right), \ \frac{dc_p}{d\varphi} = 0 \ \ und \ \ \frac{d^2 c_p}{d\varphi^2} < 0 \Rightarrow c_{p,min} = -0.33$$

$$c_p = 1 - 4 \cdot \xi + 3 \cdot \xi^2 = -0.33 \Leftrightarrow \xi^2 - \frac{4}{3}\xi + 0.444 = 0 \Rightarrow \xi_{1,2} = \frac{4}{6} \pm \sqrt{0.444 - 0.444} \Rightarrow \xi = \frac{4}{6} = 0.667$$

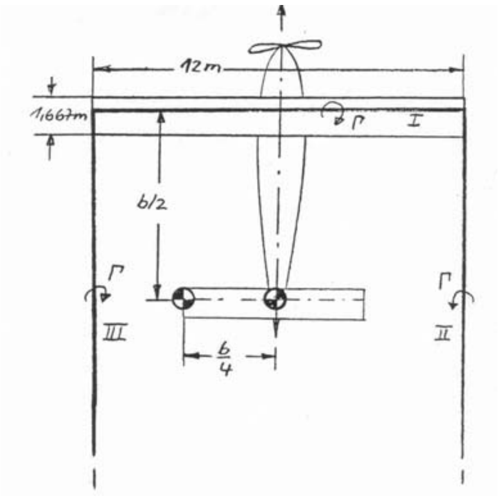
$$\xi = 0.667 \Rightarrow sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0.667 \Rightarrow \varphi = 109.47°$$

Position auf der Oberfläche des Flugzeugrumpfes

$$r_{HK}(cp_{min}) = R_{HK} \cdot \frac{sin(\varphi/2)}{sin\,\varphi} = 4 \cdot \frac{sin(35.26)}{sin\,(109.47)} = 3.464\,[m]$$

$$x(cp_{min}) = x_{Stpkt} - r_{HK}(cp_{min}) \cdot cos\,\varphi = 2.0\,[m] - 3.464\,[m] \cdot cos(109.47°) = 3.155\,[m]$$

A4.5 Induzierter Abwind (Biot-Savart)



Bestimmen Sie den Abwind und den induzierten Abwindwinkel in der Mitte und am Ende des Höhenleitwerks

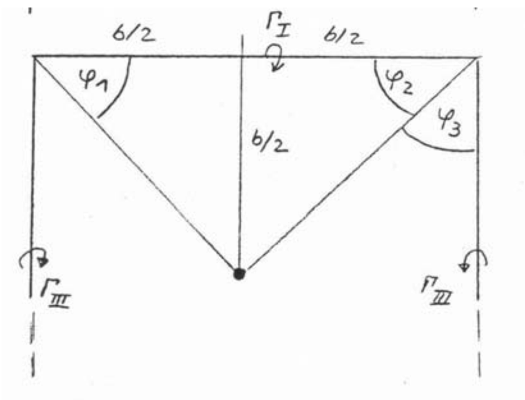
Gewicht:	$m \cdot g = 1.2 \cdot 10^4\ [N]$
Luftdichte:	$\rho = 1.0\ \left[kg/m^3\right]$
Fluggeschwindigkeit:	$V = 100\ [m/s]$
Flügelfläche:	$S = 12 \cdot 1.667 = 20\ \left[m^2\right]$

Lsg.

Auftriebsbeiwert: $$C_A = \frac{2 \cdot m \cdot g}{\rho \cdot V^2 \cdot S} = 0.12$$

Kutta-Joukowsky:
$$A = \rho \cdot b \cdot V \cdot \Gamma$$
$$= m \cdot g = \frac{\rho}{2} \cdot V^2 \cdot S \cdot C_A$$
$$\Leftrightarrow \Gamma = \frac{m \cdot g}{\rho \cdot b \cdot V} = 10\left[m^2/s\right]$$

Mitte des Höhenleitwerks



$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 45°$$

$$w_{i,m} = w_I + 2 \cdot w_{II} \quad symmetrisch$$

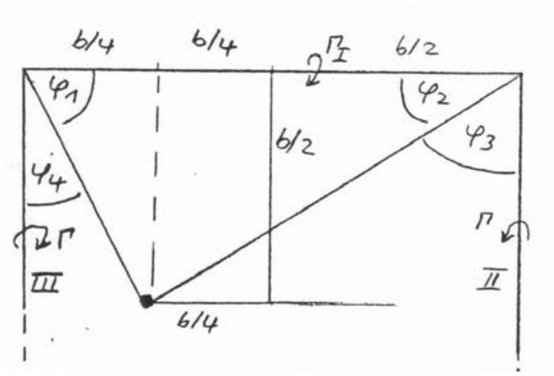
$$w_{I,m} = \frac{\Gamma}{4 \cdot \pi \cdot \frac{b}{2}} \cdot (\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) = 0.188\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$w_{II,m} = \frac{\Gamma}{4 \cdot \pi \cdot \frac{b}{2}} \cdot (\cos\varphi_3 + 1) = 0.227\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$w_{i,m} = w_I + 2 \cdot w_{II} = 0.188 + 2 \cdot 0.227 = 0.642\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$\Delta\alpha_{i,m} = \frac{w_i, m}{V_\infty} \cdot 57.3 \approx 0.4°$$

Außenkante Höhenleitwerk



$$tan\,\varphi_1 = \frac{b/2}{b/4} = 2 \;\Rightarrow\; \varphi_1 = 63.435°,\; cos\,\varphi_1 = 0.4472$$

$$tan\,\varphi_2 = \frac{b/2}{3b/4} = \frac{2}{3} \;\Rightarrow\; \varphi_2 = 32.69°,\; cos\,\varphi_2 = 0.8321\;\; \varphi_3 = 90 - \varphi_2 = 57.31°,\; \cos\varphi_3 = 0.5401$$

$$\varphi_4 = 90 - \varphi_1 = 26.57°,\; cos\,\varphi_4 = 0.8944$$

$$w_{I,a} = \frac{\Gamma}{4\cdot\pi\cdot\frac{b}{2}}\cdot\left(cos\,\varphi_1 + cos\,\varphi_2\right) = 0.17\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$w_{II,a} = \frac{\Gamma}{4\cdot\pi\cdot\frac{3\cdot b}{4}}\cdot\left(\cos\varphi_3 + 1\right) = 0.136\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$w_{III,a} = \frac{\Gamma}{4\cdot\pi\cdot\frac{b}{4}}\cdot\left(cos\,\varphi_4 + 1\right) = 0.5\left[\frac{m}{s}\right]\;\; w_{i,a} = w_{I,a} + w_{II,a} + w_{III,a} = 0.81\left[\frac{m}{s}\right]$$

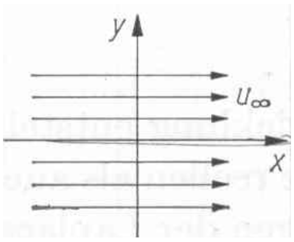
$$\Delta\alpha_{i,a} = \frac{w_{i,a}}{V_\infty}\cdot 57.3 \approx 0.5°$$

A4.6 Berechnung der Druckverteilung an einen quer angeströmten Zylinder

Berechnen Sie die Druckverteilung an der Oberfläche eines Zylinders mit dem Radius R = 1 [m], der sich in einer ebenen Translationsströmung mit u_∞ = 1 [m/s] befindet und dem eine Zirkulation der Stärke $\Gamma = -2\cdot\pi\cdot R\cdot u_\infty$ [m²/s] überlagert wurde.

Lsg.
Stromlinienbild eines mit der Geschwindigkeit U_∞ in x-Richtung quer angeströmten Zylinders in inkompressibler Strömung ergibt sich aus der Überlagerung von zwei Elementarströmungen:

1. Translationsströmung



Potentialfunktion

$$\Phi(r,\varphi) = u_\infty \cdot r \cdot \cos\varphi$$

Stromfunktion

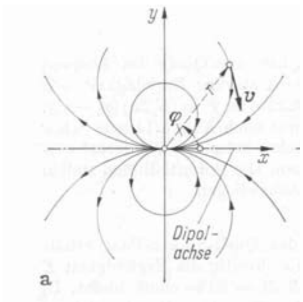
$$\Psi(r,\varphi) = u_\infty \cdot r \cdot \sin\varphi$$

Geschwindigkeiten

$$v_r(r,\varphi) = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{r} = u_\infty \cdot \cos\varphi$$

$$v_\varphi(r,\varphi) = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{r} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -u_\infty \cdot \sin\varphi$$

2. Dipol (Dipolachse = x-Achse)



Potentialfunktion

$$\Phi(r,\varphi) = \frac{M}{2\cdot\pi} \cdot \frac{\cos\varphi}{r}$$

Stromfunktion

$$\Psi(r,\varphi) = -\frac{M}{2\cdot\pi} \cdot \frac{\sin\varphi}{r}$$

Geschwindigkeiten

$$v_r(r,\varphi) = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{r} = -\frac{M}{2\cdot\pi} \cdot \frac{\cos\varphi}{r^2}$$

$$v_\varphi(r,\varphi) = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{r} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{M}{2\cdot\pi} \cdot \frac{\sin\varphi}{r^2}$$

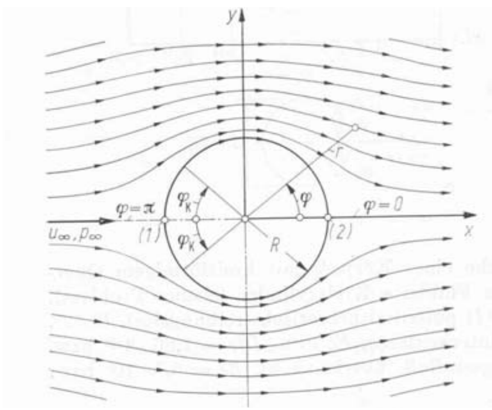
Gesamtströmung = Translationsströmung + Dipol:

Potentialfunktion

$$\Phi(r,\varphi) = u_\infty \cdot r \cdot \cos\varphi + \frac{M}{2\cdot\pi} \cdot \frac{\cos\varphi}{r}$$

Stromfunktion

$$\Psi(r,\varphi) = u_\infty \cdot r \cdot \sin\varphi - \frac{M}{2\cdot\pi} \cdot \frac{\sin\varphi}{r}$$



Geschwindigkeiten

$$v_r(r,\varphi) = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{r} = u_\infty \cdot \cos\varphi - \frac{M}{2\cdot\pi} \cdot \frac{\cos\varphi}{r^2}$$

$$v_\varphi(r,\varphi) = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{r} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -u_\infty \cdot \sin\varphi - \frac{M}{2\cdot\pi} \cdot \frac{\sin\varphi}{r^2}$$

Stromlinienbild bei Symmetrische Umströmung <u>ohne</u> Zirkulation mit symmetrischen Staupunkten (1) und (2)

Berechnung des Dipolmoments M
Die Oberfläche des Zylinders wird beschrieben durch eine kreisförmige Stromlinie mit dem Radius $r = R$ wobei die Stromfunktion den Wert Null annimmt, d.h.

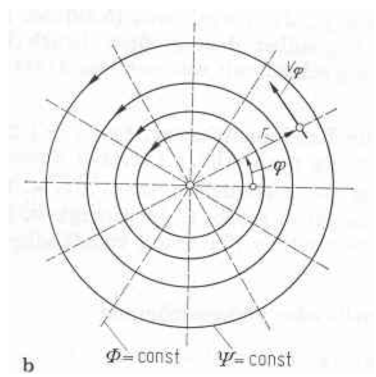
$$\Psi(r = R,\varphi) = u_\infty \cdot R \cdot \sin\varphi - \frac{M}{2\cdot\pi} \cdot \frac{\sin\varphi}{R} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{M}{2\cdot\pi} \cdot \frac{\sin\varphi}{R} = -u_\infty \cdot R \cdot \sin\varphi$$

$$\Leftrightarrow \qquad M = 2\cdot\pi\cdot u_\infty \cdot R^2$$

Quer angeströmter Zylinder mit einer Zirkulation Γ
Die Umströmung eines rotierenden Zylinders bzw. eines Zylinders mit einer Zirkulation Γ ergibt sich aus der Umströmung des stehenden Zylinders durch Hinzufügen eines Potentialwirbels mit der Zirkulation Γ.
(Achtung: <u>$\Gamma > 0$</u> wird definiert als ein gegen den Uhrzeigersinn, also <u>linksdrehender</u> Potentialwirbel)

Potentialwirbel:



Potentialfunktion

$$\Phi(r,\varphi) = \frac{\Gamma}{2\cdot\pi} \cdot \varphi$$

Stromfunktion

$$\Psi(r,\varphi) = -\frac{\Gamma}{2\cdot\pi} \cdot \ln r$$

Geschwindigkeiten

$$v_r(r,\varphi) = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} \cdot \frac{1}{r} = 0$$

$$v_\varphi(r,\varphi) = \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \cdot \frac{1}{r} = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\cdot\pi} \cdot \frac{1}{r}$$

Gesamtströmung = Translationsströmung + Dipol + Potentialwirbel

Potentialfunktion

$$\Phi(r,\varphi) = u_\infty \cdot r \cdot \cos\varphi + \frac{M}{2\cdot\pi} \cdot \frac{\cos\varphi}{r} + \frac{\Gamma}{2\cdot\pi} \cdot \varphi$$

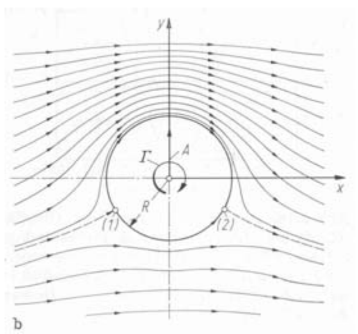
Stromfunktion

$$\Psi(r,\varphi) = u_\infty \cdot r \cdot \sin\varphi - \frac{M}{2\cdot\pi} \cdot \frac{\sin\varphi}{r} - \frac{\Gamma}{2\cdot\pi} \cdot \ln r$$

Geschwindigkeiten

$$v_r(r,\varphi) = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} \cdot \frac{1}{r} = u_\infty \cdot \cos\varphi - \frac{M}{2\cdot\pi} \cdot \frac{\cos\varphi}{r^2} + 0$$

$$v_\varphi(r,\varphi) = \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \cdot \frac{1}{r} = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -u_\infty \cdot \sin\varphi - \frac{M}{2\cdot\pi} \cdot \frac{\sin\varphi}{r^2} + \frac{\Gamma}{2\cdot\pi} \cdot \frac{1}{r}$$



Stromlinienbild bei symmetrischer Umströmung <u>mit</u> Zirkulation mit asymmetrischen Staupunkten (1) und (2)

Berechnung der Druckverteilung an der Zylinderoberfläche für $\Gamma = -2 \cdot \pi \cdot R \cdot u_\infty$, R = 1 m und u_∞ = 1 m/s

Mit dem Dipolmoment $M = 2 \cdot \pi \cdot u_\infty \cdot R^2$ ergibt sich für die Geschwindigkeiten an der Zylinderoberfläche, d.h. $r = R$

$$v_r(r = R, \varphi) = u_\infty \cdot \cos\varphi - \frac{2 \cdot \pi \cdot u_\infty \cdot R^2}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\cos\varphi}{R^2} = 0$$

$$v_\varphi(r = R, \varphi) = -u_\infty \cdot \sin\varphi - \frac{2 \cdot \pi \cdot u_\infty \cdot R^2}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\sin\varphi}{R^2} - \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{R} = -2 \cdot u_\infty \cdot \sin\varphi - \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{R}$$

Bernoulli Gleichung:

$$p_{Stpkt} = p_\infty + \frac{\rho}{2} \cdot u_\infty{}^2 = p_K + \frac{\rho}{2} \cdot v_\varphi{}^2$$

$$c_p = \frac{p_K - p_\infty}{\frac{\rho}{2} \cdot u_\infty{}^2} = 1 - \left(\frac{v_\varphi}{u_\infty}\right)^2 = 1 - \left(\frac{-2 \cdot u_\infty \cdot \sin\varphi - \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{R}}{u_\infty}\right)^2$$

$$c_p = 1 - 4 \cdot \sin^2\varphi - \frac{2 \cdot \Gamma \cdot \sin\varphi}{\pi \cdot R \cdot u_\infty} - \left(\frac{\Gamma}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot u_\infty}\right)^2$$

mit

$\Gamma = -2 \cdot \pi \cdot R \cdot u_\infty$, R = 1 m und u_∞ = 1 m/s

folgt

$$c_p = 4 \cdot \left(\sin\varphi - \sin\varphi^2\right)$$