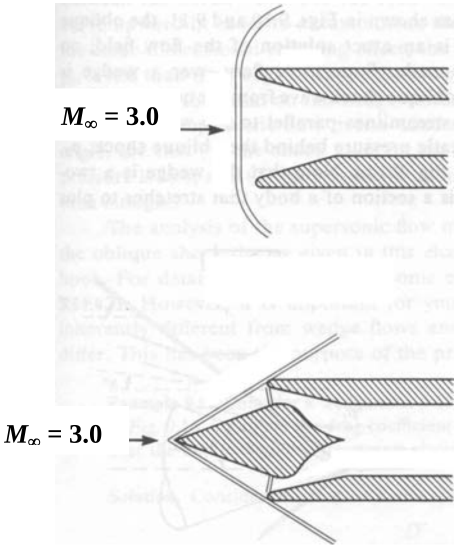
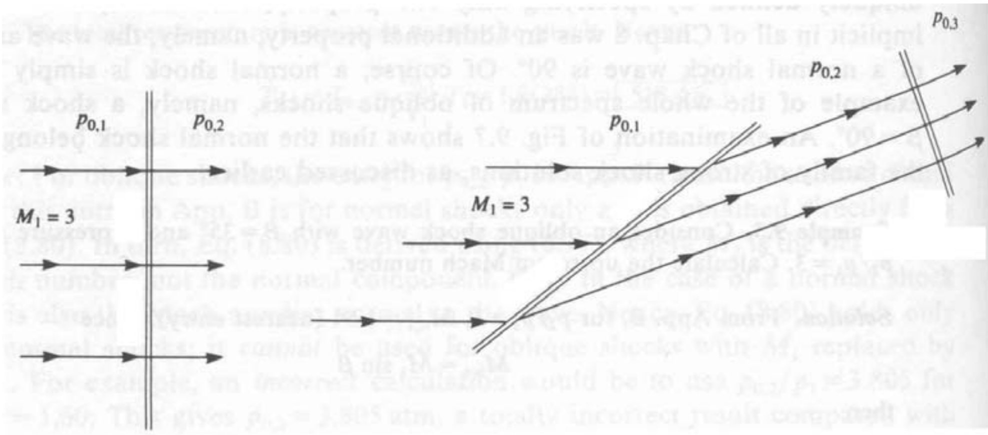
A8.1 Totaldruckverlust bei Überschalleinläufen



Ein Überschalleinlauf soll für eine Fluggeschwindigkeit von M_∞ = 3.0 so ausgelegt werden, daß die Machzahl vor dem Verdichter bei M < 0.6 liegt. Dabei ist zu untersuchen ob dies mit einem einfachen senkrechten Stoß (1) oder über die Kombination eines schrägen Stoßes (β = 40°) mit einem senkrechten Stoß (2) zu erreichen ist.

Welche Form des Einlaufs würden Sie auswählen?



(1) (2)

(1) Senkrechter Stoß

Entropieerhöhung bei M_1 = 3.0

$$s_2 - s_1 = c_p \cdot \ln\left\{\left[1 + \frac{2\cdot\kappa}{\kappa+1}\cdot\left(M_1^2 - 1\right)\right]\cdot\frac{2 + (\kappa-1)\cdot M_1^2}{(\kappa+1)\cdot M_1^2}\right\} - R\cdot\ln\left[1 + \frac{2\cdot\kappa}{\kappa+1}\cdot\left(M_1^2 - 1\right)\right]$$

$$s_2 - s_1 = 319.63\left[J/kg\cdot K\right]$$

Totaldruckverlust

$$\frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} = e^{\frac{-(s_2-s_1)}{R}} = 0.3283$$

Machzahl hinter dem Stoß

$$M_2 = \sqrt{\frac{1 + \frac{\kappa-1}{2}\cdot M_1^2}{\kappa\cdot M_1^2 - \frac{\kappa-1}{2}}} = 0.475$$

(2) Kombination aus schrägem und senkrechtem Stoß

Einlauframpe (Umlenkwinkel θ) für M_1 = 3.0 und β = 40°

$$\tan\theta = 2\cdot\cot\beta\cdot\frac{M_1^{\,2}\cdot\sin^2\beta-1}{M_1^{\,2}\cdot(\kappa+\cos 2\beta)+2}$$

$$\theta = 21.85°$$

Machzahl M_2 hinter dem schrägen Stoß

$$M_{n,1} = M_1\cdot\sin\beta = 1.928$$

$$M_{n,2} = \sqrt{\frac{1+\left(\frac{\kappa-1}{2}\right)\cdot M_{n,1}^{\,2}}{\kappa\cdot M_{n,1}^{\,2}-\left(\frac{\kappa-1}{2}\right)}} = 0.59$$

$$M_2 = \frac{M_{n,2}}{\sin(\beta-\theta)} = 1.894$$

Entropieerhöhung durch den schrägen Stoß

$$s_2-s_1 = c_p\cdot\ln\left\{\left[1+\frac{2\cdot\kappa}{\kappa+1}\cdot\left(M_{n,1}^{\,2}-1\right)\right]\cdot\frac{2+(\kappa-1)\cdot M_{n,1}^{\,2}}{(\kappa+1)\cdot M_{n,1}^{\,2}}\right\} - R\cdot\ln\left[1+\frac{2\cdot\kappa}{\kappa+1}\cdot\left(M_{n,1}^{\,2}-1\right)\right]$$

$$s_2-s_1 = 80.88\,[J/kg\cdot K]$$

Totaldruckverlust durch schrägen Stoß

$$\frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} = e^{\frac{-(s_2-s_1)}{R}} = 0.7544$$

Entropieerhöhung durch den senkrechten Stoß

$$s_3-s_2 = c_p\cdot\ln\left\{\left[1+\frac{2\cdot\kappa}{\kappa+1}\cdot\left(M_2^{\,2}-1\right)\right]\cdot\frac{2+(\kappa-1)\cdot M_2^{\,2}}{(\kappa+1)\cdot M_2^{\,2}}\right\} - R\cdot\ln\left[1+\frac{2\cdot\kappa}{\kappa+1}\cdot\left(M_2^{\,2}-1\right)\right]$$

$$s_3-s_2 = 74.96\,[J/kg\cdot K]$$

Totaldruckverlust durch senkrechten Stoß

$$\frac{p_{0,3}}{p_{0,2}} = e^{\frac{-(s_3-s_2)}{R}} = 0.7701$$

Machzahl hinter dem senkechten Stoß

$$M_3 = \sqrt{\frac{1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot M_2^{\,2}}{\kappa\cdot M_2^{\,2}-\frac{\kappa-1}{2}}} = 0.597$$

Totaldruckverlust insgesamt

$$\frac{p_{0,3}}{p_{0,1}} = \frac{p_{0,2}}{p_{0,1}}\cdot\frac{p_{0,3}}{p_{0,2}} = 0.5810$$

Entscheidend ist der Totaldruckverlust im Einlauf, d.h. wie hoch ist der noch zur Verfügung stehende Totaldruck vor dem Verdichter. Im Fall (1) wird die Strömung auf M = 0.475 verzögert, der Totaldruck beträgt jedoch nur noch 32.8%. Wesentlich günstiger sieht Fall (2) aus. Hier wird die Strömung auf M = 0.597 verzögert, der zur Verfügung stehende Totaldruck beträgt jedoch noch 58.1%.

A8.2 Erzeugung einer Überschallströmung

Auslegungsmachzahl: $M_e = 2.5$
Konische Düse, Austrittsdurchmesser: $D_e = 1$ [m]
Umgebungsluftdruck: $p_\infty = 1$ [bar]

Berechnen Sie unter der Annahme einer angepaßten Düse und für Luft als ideales Gas den Durchmesser D^* des Düsenhalses A^*

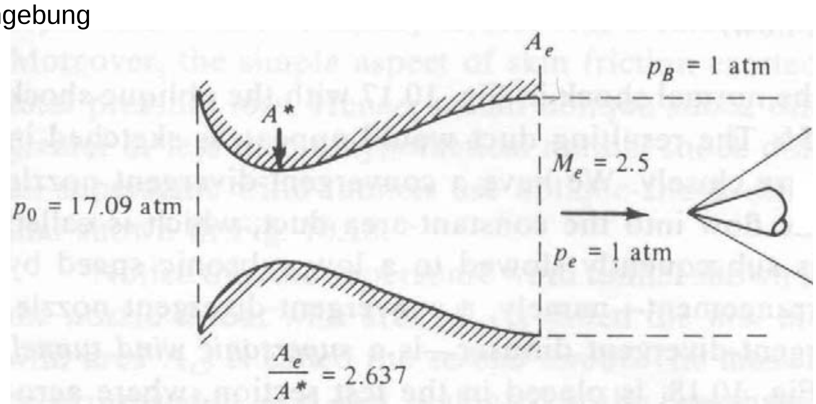
$$\left(\frac{A_e}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{{M_e}^2}\cdot\left[\frac{2}{\kappa+1}\cdot\left(1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot{M_e}^2\right)\right]^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}$$

$$\Rightarrow \qquad A^* = \frac{A_e}{\sqrt{\frac{1}{{M_e}^2}\cdot\left[\frac{2}{\kappa+1}\cdot\left(1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot{M_e}^2\right)\right]^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}}} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\sqrt{\frac{1}{2.5^2}\cdot\left[\frac{2}{1.4+1}\cdot\left(1+\frac{1.4-1}{2}\cdot 2.5^2\right)\right]^{\frac{1.4+1}{1.4-1}}}}$$

$$\Rightarrow \qquad A^* = 0.2979\left[m^2\right] \qquad \Rightarrow \qquad D^* = \sqrt{\frac{4\cdot A^*}{\pi}} = \sqrt{\frac{4\cdot 0.2979}{\pi}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{D^* = 0.616\left[m\right]}$$

Berechnen Sie für die folgenden Konstruktionsvarianten den erforderlichen Kesseldruck p_0 vor der Expansion in der Düse und den statischen Druck p_e in der Meßstrecke.

a) Der Kanal soll über eine offene Meßstrecke verfügen, d.h. die Düse expandiert direkt in die freie Umgebung



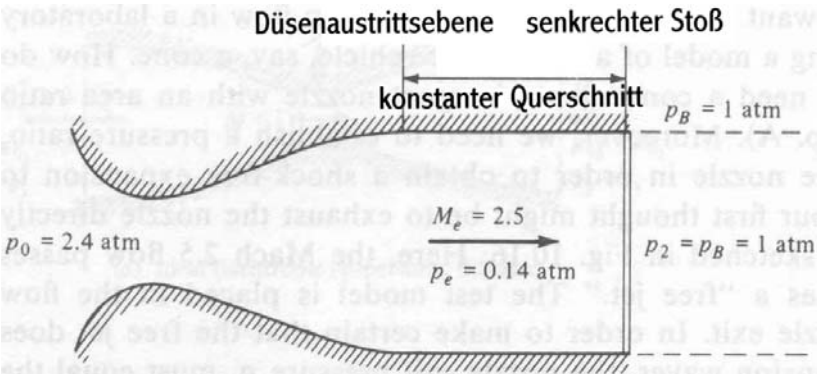
Ausströmen mit Überschallgeschwindigkeit in die freie Atmosphäre

$$\boxed{p_e = p_\infty = 10^5\left[Pa\right]}$$

$$\frac{p_0}{p_e} = \left(1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot{M_e}^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \qquad \Rightarrow \qquad p_0 = p_e\cdot\left(1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot{M_e}^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

$$\Rightarrow \qquad p_0 = 10^5\cdot\left(1+\frac{1.4-1}{2}\cdot 2.5^2\right)^{\frac{1.4}{1.4-1}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{p_0 = 17.09\cdot 10^5\left[Pa\right]}$$

b) An das Düsenende wird ein zylindrisches Segment (Meßstrecke) angefügt. Anschließend strömt die Luft in die freie Umgebung



Überschalldüse mit angeschlossenem konstantem Strömungsquerschnitt

Da in der Meßstrecke eine Überschallströmung vorliegt stellt sich am Ende des zylindrischen Segments ein senkrechter Stoß ein

Statischer Druck p_e in der Meßstrecke

$$\frac{p_\infty}{p_e} = 1 + \frac{2\cdot\kappa}{\kappa+1}\cdot\left(M_e^{\,2}-1\right) \qquad \Rightarrow \qquad p_e = \frac{p_\infty}{1+\frac{2\cdot\kappa}{\kappa+1}\cdot\left(M_e^{\,2}-1\right)}$$

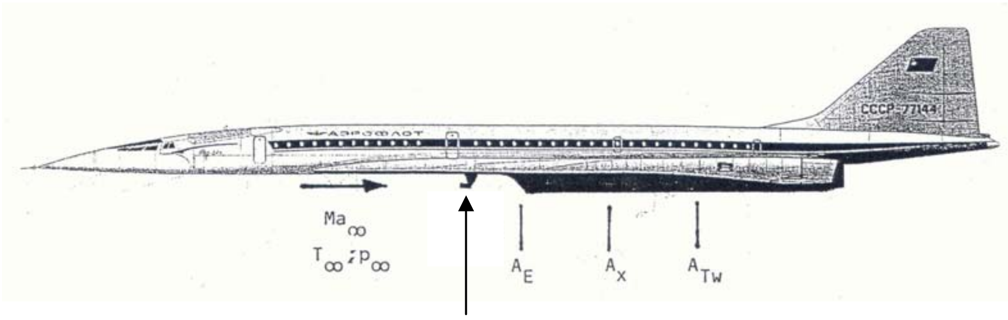
$$\Rightarrow \qquad p_e = \frac{1}{1+\frac{2\cdot 1.4}{1.4+1}\cdot\left(2.5^2-1\right)} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{p_e = 14035[Pa]}$$

Kesseldruck p_0 vor der Expansion

$$p_0 = p_e\cdot\left(1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot M_e^{\,2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \qquad \Rightarrow \qquad p_0 = 14035\cdot\left(1+\frac{1.4-1}{2}\cdot 2.5^2\right)^{\frac{1.4}{1.4-1}}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{p_0 = 2.398\cdot 10^5\,[Pa]}$$

A8.3 Überschallverkehrsflugzeug



Luftdatensystem

Ein Überschallverkehrsflugzeug erhält die Freigabe auf FL360 zu steigen. Zum Zeitpunkt der Freigabe werden von dem Luftdatensystem folgende Größen gemessen:

- Statischer Umgebungsdruck: $p_\infty = 160\,[hPa]$
- Statische Umgebungstemperatur: $T_\infty = -53.9\,[°C]$
- Totaltemperatur vor dem Triebwerkseinlauf: $T_t = 159\,[°C]$

Hinweise
- Luft kann als ideales Gas angenommen werden
- 1ft = 0.3048 [m]
- Temperaturgradienten entsprechen ISA

1.
Liegen an diesem Punkt ISA-Bedingungen vor? Kurze Begründung!

$$T_\infty = -53.9 + 273.15 = 219.25\,[K]$$

H	T	p	ρ	c	$\nu \cdot 10^4$	$p/p_{H=0}$	$\rho/\rho_{H=0}$	$T/T_{H=0}$	H
[km]	[K]	[Pa]	[kg/m³	[m/s]	[m²/s]	[-]	[-]	[-]	[km]
10.6	219.250	24104.82	0.382780	296.921	0.37525	0.237896	0.312474	0.760888	10.6

<u>Nein</u>, nach ISA-Bedingungen würde zu einer statischen Temperatur von $T_\infty = 219.25\,[K]$ ein statischer Druck von $p_\infty = 241\,[hPa]$ und nicht der gemessene Druck von $p_\infty = 160\,[hPa]$ gehören.

2.
<u>Berechnen</u> Sie mit den Angaben des Luftdatensystems ($p_\infty = 160\left[hPa\right], T_\infty = -53.9\left[°C\right]$) das QNH (Luftdruck, bezogen auf Meeresniveau), wenn die statische Temperatur am Flugplatz beim Start $T_\infty = 34.85\left[°C\right]$ betrug und der Platz auf einer Höhe von $h = 615\left[m\right]$ liegt.

Flugzeug erhält die Freigabe auf FL360 (= 36000 ft = 10973 m) zu steigen, d.h. es befindet sich noch in einer Höhe $h < 11$ km.

Temperatur auf MSL

$$T_{MSL} = T_h - a \cdot h = 34.85 + 6.5 \cdot 10^{-3} \cdot 615 \qquad \Rightarrow \qquad T_{MSL} = T_A = 38.85\left[°C\right] = 312\left[K\right]$$

QNH

$$p_h = p_A \cdot \left(\frac{T_h}{T_A}\right)^{\frac{-g_0}{a \cdot R}}$$

$$\Rightarrow \qquad QNH = p_{MSL} = p_A = p_h \cdot \left(\frac{T_h}{T_{MSL}}\right)^{\frac{g_0}{a \cdot R}} = 160 \cdot \left(\frac{219.25}{312}\right)^{\frac{9.81}{-6.5 \cdot 10^{-3} \cdot 287}}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{QNH = 1025\left[hPa\right]}$$

3.
Berechnen Sie die Flugmachzahl M_∞ aus den Werten des Luftdatensystems.

$$T_t = T_\infty \cdot \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot M_\infty^{\;2}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad M_\infty = \sqrt{\left(\frac{T_t}{T_\infty} - 1\right) \cdot \frac{2}{\kappa - 1}} = \sqrt{\left(\frac{159 + 273.15}{-53.9 + 273.15} - 1\right) \cdot \frac{2}{1.4 - 1}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_\infty = 2.2}$$

Notfallwert für spätere Berechnungen: $M_\infty = 2.0$

4.
Berechnen Sie den Totaldruck p_t. vor dem Luftdatensystem.

$$p_t = p_\infty \cdot \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot M_\infty^{\;2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} = 16000 \cdot \left(1 + \frac{1.4 - 1}{2} \cdot 2.2^2\right)^{\frac{1.4}{1.4 - 1}}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{p_t = 171083\left[Pa\right]}$$

5.
Berechnen Sie den Druck $p_{0,2}$, der am Pitot-Rohr des Luftdatensystems anliegt.

Rayleigh-Gleichung

$$p_{0,2} = p_\infty \cdot \left(\frac{(\kappa+1)^2 \cdot M_\infty^{\ 2}}{4 \cdot \kappa \cdot M_\infty^{\ 2} - 2 \cdot (\kappa - 1)} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \cdot \left(\frac{1 - \kappa + 2 \cdot \kappa \cdot M_\infty^{\ 2}}{\kappa + 1} \right)$$

$$\Rightarrow \qquad p_{0,2} = 16000 \cdot \left(\frac{(1.4+1)^2 \cdot 2.2^2}{4 \cdot 1.4 \cdot 2.2^2 - 2 \cdot (1.4-1)} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \cdot \left(\frac{1 - 1.4 + 2 \cdot 1.4 \cdot 2.2^2}{1.4+1} \right)$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{p_{0,2} = 107464 [Pa]}$$

oder
Berechnung unter Anwendung der Gleichungen für einen senkrechten Verdichtungsstoß
Größen vor dem Stoß: Index '1' , Größen hinter dem Stoß: Index '2'

$$p_2 = p_1 \cdot \left[1 + \frac{2 \cdot \kappa}{\kappa+1} \cdot \left(M_1^{\ 2} - 1 \right) \right] = 16000 \cdot \left[1 + \frac{2 \cdot 1.4}{1.4+1} \cdot \left(2.2^2 - 1 \right) \right]$$

$$\Rightarrow \qquad p_2 = 87680 [Pa]$$

$$M_2 = \sqrt{\frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot M_1^{\ 2}}{\kappa \cdot M_1^{\ 2} - \frac{\kappa-1}{2}}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1.4-1}{2} \cdot 2.2^2}{1.4 \cdot 2.2^2 - \frac{1.4-1}{2}}}$$

$$\Rightarrow \qquad M_2 = 0.547$$

$$p_{0,2} = p_2 \cdot \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot M_2^{\ 2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = 87680 \cdot \left(1 + \frac{1.4-1}{2} \cdot 0.547^2 \right)^{\frac{1.4}{1.4-1}}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{p_{0,2} = 107464 [Pa]}$$

6.
Im Einlaufkanal steht Ihnen zwischen den Ebenen A_E und A_x eine regelbare Rampe zur Verfügung. Welchen Rampenwinkel müssen Sie einstellen, damit in der der Ebene A_x die Normalkomponente der Machzahl vor dem Stoß $M_{n,1} = 1.414$ beträgt?

$$M_{n,1} = M_\infty \cdot \sin\beta \qquad \Rightarrow \qquad \beta = \arcsin\left(\frac{M_{n,1}}{M_\infty} \right) = \arcsin\left(\frac{1.414}{2.2} \right) \Rightarrow \ \beta = 40 [grad]$$

$$\tan\theta = 2 \cdot \cot\beta \cdot \frac{M_1^{\ 2} \cdot \sin^2\beta - 1}{M_1^{\ 2} \cdot (\kappa + \cos 2\beta) + 2} = 2 \cdot \cot(40) \cdot \frac{2.2^2 \cdot \sin^2(40) - 1}{2.2^2 \cdot (1.4 + \cos(2 \cdot 40)) + 2}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\theta = 13.92 [grad]}$$

7.

Berechnen Sie die Machzahl M_x in der Ebene A_x.

$$M_{n,2} = \sqrt{\frac{1+\left(\frac{\kappa-1}{2}\right)\cdot M_{n,1}{}^2}{\kappa\cdot M_{n,1}{}^2-\left(\frac{\kappa-1}{2}\right)}} = \sqrt{\frac{1+\left(\frac{1.4-1}{2}\right)\cdot 1.414^2}{\kappa\cdot 1.414^2-\left(\frac{1.4-1}{2}\right)}} \quad\Rightarrow\quad M_{n,2} = 0.734$$

$$M_x = M_2 = \frac{M_{n,2}}{\sin(\beta-\theta)} = \frac{0.734}{\sin(40-13.92)} \quad\Rightarrow\quad \boxed{M_x = 1.67}$$

8.

Wie groß muß das Flächenverhältnis A_E/A_x sein?

$$\dot{m}_E = \dot{m}_x \quad\Rightarrow\quad \rho_E\cdot c_E\cdot A_E = \rho_x\cdot c_x\cdot A_x \quad\Rightarrow\quad \frac{A_E}{A_x} = \frac{\rho_x\cdot c_x}{\rho_E\cdot c_E} = \frac{\rho_x\cdot c_x}{\rho_\infty\cdot c_\infty}$$

$$\rho_E = \rho_\infty = \frac{p_\infty}{R\cdot T_\infty} = \frac{16000}{287\cdot 219.25} \quad\Rightarrow\quad \rho_E = 0.2543\left[kg/m^3\right]$$

$$c_E = c_\infty = \sqrt{\kappa\cdot R\cdot T_\infty}\cdot M_\infty = \sqrt{1.4\cdot 287\cdot 219.25}\cdot 2.2 \quad\Rightarrow\quad c_E = 653\left[m/s\right]$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\kappa+1)\cdot M_{n,1}{}^2}{2+(\kappa-1)\cdot M_{n,1}{}^2} \quad\Rightarrow\quad \rho_x = \rho_2 = \rho_1\cdot\left[\frac{(\kappa+1)\cdot M_{n,1}{}^2}{2+(\kappa-1)\cdot M_{n,1}{}^2}\right]$$

$$\Rightarrow\quad \rho_x = \rho_2 = \rho_1\cdot\left[\frac{(1.4+1)\cdot 1.414^2}{2+(1.4-1)\cdot 1.414^2}\right] \quad\Rightarrow\quad \rho_x = 0.4359\left[kg/m^3\right]$$

$$T_x = T_t\cdot\left(1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot M_x{}^2\right)^{-1} = 432.15\cdot\left(1+\frac{1.4-1}{2}\cdot 1.67^2\right)^{-1} \quad\Rightarrow\quad T_x = 277.41\left[K\right]$$

$$c_x = \sqrt{\kappa\cdot R\cdot T_x}\cdot M_x = \sqrt{1.4\cdot 287\cdot 277.41}\cdot 1.67 \quad\Rightarrow\quad c_x = 557.5\left[m/s\right]$$

$$\frac{A_E}{A_x} = \frac{\rho_x\cdot c_x}{\rho_E\cdot c_E} = \frac{0.4359\cdot 557.5}{0.2543\cdot 653} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{A_E}{A_x} = 1.463}$$