Kapitel 2 – Musterlösungen

Üb. 2-1: Berechnung des Drucks am Boden in einem nach oben offenen, mit Wasser gefüllten Behälters

Hydrostatisches Grundgesetz für ρ = const.:

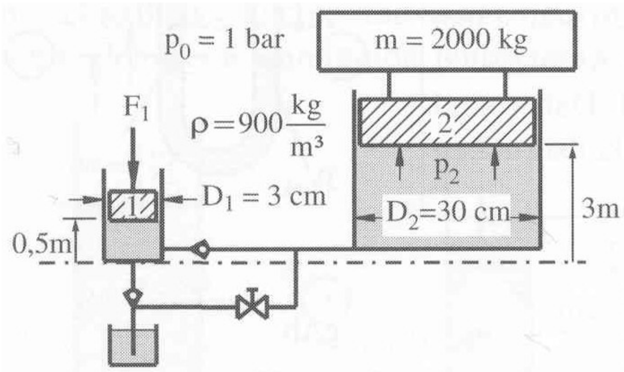
$$p(h) = p_0 + h \cdot \rho \cdot g$$

$$\Rightarrow \qquad p(h = 10m) = 10^5 + 10 \cdot 10^3 \cdot 9.81 = 198100\,Pa = 1{,}981 \cdot 10^5\,Pa = 1{,}981\,bar$$

allgemein:

Der Wasserdruck nimmt linear pro 10 m Tiefe um ca. 1 bar zu

Üb. 2-2: Hydraulische Presse mit reibungs- und gewichtsfreien Kolben



1. Welche Kraft F_1 ist am Kolben (1) aufzuwenden, um die Masse m = 2000 kg mit dem Kolben (2) anzuheben, „exakte“ Lösung?

2. Wie groß ist der Fehler bei Anwendung der Näherungslösung?

3. Wie groß ist der Druck p_2 am Boden des Kolben (2)

1) Kraft F_1 am Kolben (1)

$$\frac{F_2}{A_2} = \frac{F_1}{A_1} - \rho \cdot g \cdot \Delta h$$

$$F_1 = \left[\frac{F_2}{A_2} + \rho \cdot g \cdot (z_2 - z_1)\right] \cdot A_1\,, \qquad F_2 = m \cdot g$$

$$F_1 = \left[\frac{m \cdot g}{A_2} + \rho \cdot g \cdot (z_2 - z_1)\right] \cdot A_1 = \left[\frac{2000 \cdot 9{,}81}{0.3^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4}} + 900 \cdot 9{,}81 \cdot (3 - 0{,}5)\right] \cdot 0{,}03^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} = 211{,}8\,N$$

2) Fehler bei Anwendung der Näherungslösung

$$F_1' = \left[\frac{m \cdot g}{A_2} + \underbrace{\rho \cdot g \cdot (z_2 - z_1)}_{=0}\right] \cdot A_1 = \left[\frac{2000 \cdot 9{,}81}{0{,}3^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4}}\right] \cdot 0{,}03^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} = 196{,}2\,N$$

$$\Delta F_{rel} = \frac{F_1' - F_1}{F_1} = \frac{196{,}2 - 211{,}8}{211{,}8} = -0{,}0737 \;\Rightarrow\; 7{,}37\%$$

3) Druck p_2 am Boden des Kolben (2)

$$p_2 = p_0 + \frac{F_2}{A_2} = 10^5 + \frac{2000 \cdot 9.81}{0.3^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4}} = 3{,}776 \cdot 10^5\,Pa$$

Üb. 2-3: Berechnung der Ansaughöhe einer Pumpe

Temperatur T °C	Dichte ρ kg/m³	Dampfdruck p_{Da} bar	Dampfdruckhöhe H_{Da} mWS
0	999,8	0,006	0,06
5	1000,0	0,009	0,09
10	999,6	0,012	0,12
20	998,2	0,024	0,24
30	995,6	0,042	0,43
40	992,2	0,074	0,75
50	988,0	0,123	1,25
60	983,2	0,198	2,02
70	977,7	0,311	3,17
80	971,3	0,473	4,82
90	965,3	0,700	7,14
100	958,3	1,013	10,33

Dampfdruckkurve $H_{Da} = f(T)$ von Wasser

Luftdruck $p_b \approx 1$ bar = 10^5 Pa

Temperatur T = 20°C   Dichte ρ_{Wasser} = 998,2 kg/m³

$$H_{S,th} = \frac{p_b - p_{Da}}{\rho \cdot g} = \frac{p_b}{\rho \cdot g} - \frac{p_{Da}}{\rho \cdot g} = H_b - H_{Da}$$

$$H_{S,th} = \frac{p_b}{\rho \cdot g} - \frac{p_{Da}}{\rho \cdot g} = \frac{10^5}{998.2 \cdot 9.81} - \frac{p_{Da}}{\rho \cdot g}$$

$$H_{S,th} = 10{,}212\,m - H_{Da}$$

Wassertemperatur T = 20°C:

$$p_{Da} = 0{,}024\,bar = 2400\,Pa$$

$$\rho = 998{,}2\,kg/m^3$$

$$H_{Da} = \frac{2400}{998{,}2 \cdot 9.81} = 0{,}245\,m$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{H_{S,th} = 10{,}212 - 0{,}245 = 9{,}967\ m}$$

Üb. 2-4: Um wieviel steigt der Meeresspiegel, wenn das arktische Eis abtaut?

geg.:

$$\rho_{Eis} \approx 920\ kg/m^3$$

$$\rho_{Meerwasser} \approx 1025\ kg/m^3$$

Eintauchtiefe eines schwimmenden Eisbergs:

Schwimmbedingung

$$F_G = F_A$$

$$F_G = \rho_{Eis} \cdot V_{Eis,gesamt} \cdot g$$

$$F_A = \rho_{Meerwasser} \cdot V_{Eis,\,getaucht} \cdot g$$

$$\rho_{Eis} \cdot V_{Eis,\,gesamt} \cdot g = \rho_{Meerwasser} \cdot V_{Eis,\,getaucht} \cdot g$$

$$\frac{V_{Eis,getaucht}}{V_{Eis,gesamt}} = \frac{\rho_{Eis}}{\rho_{Meerwasser}} = \frac{920}{1025} \approx 0{,}9$$

d.h. ca. 90% der Masse des Eisbergs befinden sich unter der Wasseroberfläche

Schwimmbedingung

$$F_A = F_G$$

$$\Leftrightarrow \quad V_{Eis,\,getaucht} \cdot \rho_{Wasser} \cdot g = V_{Eis,\,gesamt} \cdot \rho_{Eis} \cdot g$$

$$\Leftrightarrow \quad V_{Eis,\,gesamt} = V_{Eis,getaucht} \cdot \frac{\rho_{Wasser}}{\rho_{Eis}}$$

Abschmelzender Eisberg

$$m_{Eis} = m_{Wasser}$$

$$\Leftrightarrow \quad V_{Eis,\,gesamt} \cdot \rho_{Eis} = V_{Wasser} \cdot \rho_{Wasser}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(V_{Eis,getaucht} \cdot \frac{\rho_{Wasser}}{\rho_{Eis}} \right) \cdot \rho_{Eis} = V_{Wasser} \cdot \rho_{Wasser}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{V_{Eis,getaucht} = V_{Wasser}}$$

⇒ d.h. der Meeresspiegel bleibt konstant[*1)]

[*1)] Anmerkung: Die Geschichte hat natürlich einen kleinen Schönheitsfehler....

Üb. 2-5: Bestimmung der Oberflächenspannung von 2-Methylpropanol

Aus einem Stalagmometer flossen bei T = 20°C n = 405 Tropfen 2-Methylpropanol aus. Die Dichte der Flüssigkeit betrug ρ = 0,9477 g/cm^3. Wie groß ist ihre Oberflächenspannung σ, wenn mit dem gleichen Gerät $n(H_2O)$ = 137 Tropfen Wasser von 20°C gezählt wurden?

Bei bekannter Oberflächenspannung von Wasser gilt

$$\sigma = \sigma(H_2O) \cdot \frac{\rho \cdot n(H_2O)}{\rho(H_2O) \cdot n}$$

Umrechnung der Oberflächenspannung von Wasser bei 18°C auf die Meßtemperatur 20°C:

$$\sigma_{H_2O}(T) = \sigma_{H_2O}(18°C) - 0.0155 \cdot 10^{-2} \left[N \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}\right] \cdot (T - 18°C)$$

$$\sigma_{H_2O}(20°C) = 7.305 \cdot 10^{-2} \left[N \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}\right] - 0.0155 \cdot 10^{-2} \left[N \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}\right] \cdot (20 - 18)[K] = 7.274 \cdot 10^{-2} \left[N \cdot m^{-1}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad \sigma_{2-Methylpropanol}(20°C) = 7.274 \cdot 10^{-2} \left[N \cdot m^{-1}\right] \cdot \frac{0.9477\left[\frac{g}{cm^3}\right] \cdot 137}{0.9982\left[\frac{g}{cm^3}\right] \cdot 405} = 2.336 \cdot 10^{-2} \left[N \cdot m^{-1}\right]$$

Üb. 2-6: Bestimmung der Oberflächenspannung von Wasser bei 18°C

Berechnung des Radius r der Kapillare mittels einer eingewogenen Quecksilbersäule

geg.:	T	=	18 °C	(Temperatur)
	m_{Hg}	=	1.297 g	(Einwaage an Quecksilber in der Kapillare)
	l_{Hg}	=	5.40 cm	(Fadenlänge des Quecksilbers in der Kapillare)
	ρ_{Hg}	=	13,595 g/cm^3 = 13.595·10^3 kg/m³	(Dichte)
	h_{H2O}	=	19,85 mm	(Mittelwert für die Höhe der aufgestiegenen Wassersäule)

Radius der Kapillare r

$$m_{Hg} = r^2 \cdot \pi \cdot l_{Hg} \cdot \rho_{Hg} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{m_{Hg}}{\pi \cdot l_{Hg} \cdot \rho_{Hg}}}$$

$$r = \sqrt{\frac{1{,}297 \cdot 10^{-3} kg}{3{,}14 \cdot 5{,}4 \cdot 10^{-2} m \cdot 13{,}595 \cdot 10^3 kg/m^3}} = 7{,}501 \cdot 10^{-4} m$$

Oberflächenspannung σ

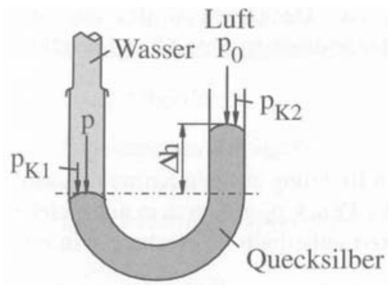
$$\sigma = \frac{r \cdot h_{H_2O} \cdot \rho_{H_2O} \cdot g}{2} = \frac{1}{2} \cdot 7{,}501 \cdot 10^{-4} m \cdot 19{,}85 \cdot 10^{-3} m \cdot 10^3 kg/m^3 \cdot 9{,}81 = 7{,}3 \cdot 10^{-2} \; N \cdot m^{-1}$$

Üb. 2-7: **Bestimmung der Oberflächenspannung von H_2O mittels Ringmethode**

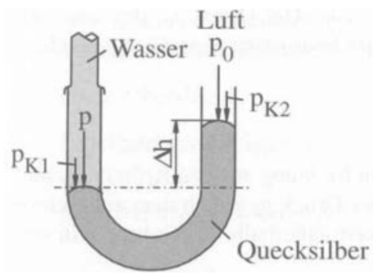
T	=	25 °C	(Wassertemperatur)
m	=	4,910 g	(Masse des Ringes)
F_2	=	$7{,}512 \cdot 10^{-2}$ N	(Zugkraft vor dem Abreißen)
d	=	60 mm	(Durchmesser des Ringes)

$$\sigma = \frac{F_2 - F_1}{(2 \cdot r \cdot \pi) \cdot 2} = \frac{7{,}512 \cdot 10^{-2} - 4{,}910 \cdot 9{,}81}{0{,}06 \cdot \pi \cdot 2} \quad \Rightarrow \quad \sigma(T = 25°C) = 7{,}149 \cdot 10^{-2}\, N/m$$

Üb. 2-8: **Einfluß der Kapillarität in einem Quecksilber U-Rohr Manometer**



D	=	6 mm	(Rohrinnendurchmesser)
ε_W	=	140 grd	(Randwinkel Hg/Glas)
T	=	20 °C	(Temperatur)
$\sigma_{Hg/H20}$	=	0.380 N/m	(Grenzflächenspannung)
$\sigma_{Hg/Luft}$	=	0.470 N/m	(Grenzflächenspannung)



Druck in verbundenen Gefäßen

$$p + p_{K1} = p_0 + p_{K2} + \rho_{Hg} \cdot g \cdot \Delta h$$

$$p - p_0 = \underbrace{p_{K2} - p_{K1}}_{Kapillarität} + \underbrace{\rho_{Hg} \cdot g \cdot \Delta h}_{hydrostatischerDruck}$$

Kapillaritätseinfluß

$$p_{K2} - p_{K1} = \frac{2 \cdot \sigma_{Hg/Luft}}{|r_{K1}|} - \frac{2 \cdot \sigma_{Hg/H2O}}{|r_{K2}|}$$

mit $\quad |r_{K1}| = |r_{K2}| = \frac{D}{2} \cdot \frac{1}{|\cos \varepsilon_W|} \quad$ folgt

$$p_{K2} - p_{K1} = \frac{2 \cdot (0{,}47\, N/m - 0{,}38\, N/m) \cdot |cos 140\, grad|}{0{,}5 \cdot 6 \cdot 10^{-3}\, m} = 45{,}96\, Pa$$

Der Meßfehler infolge Kapillarität wird nur über die Oberflächenspannung als Funktion der Materialpaarung und dem Innendurchmesser des Manometers bestimmt

Üb. 2-9: Geschwindigkeitsmessung mittels Schrägrohrmanometer und Prandtl-Rohr in der offenen Messstrecke eines Windkanals

geg.:

l	=	100 mm	(Länge der aufgestiegenen Meßflüssigkeit)
ρ_M	=	800 kg/m³	(Dichte der Meßflüssigkeit, Alkohol)
α	=	30 grd	(Neigungswinkel des Manometers)

Tageswerte im Labor

p	=	..720 mm Hg	(Luftdruck)
T	=	23 °C	(Lufttemperatur)
φ	=	....70 %	(relative Feuchte)

Berechnen Sie für diese Bedingungen die Strömungsgeschwindigkeit in der Meßstrecke des Windkanals.

Berücksichtigung der Tageswerte

Temperaturkorrektur des Quecksilberbarometers auf T = 23°C

$$L_0 = L_T \cdot \left(1 - 1{,}81 \cdot 10^{-4} \cdot T\right) = 720 \cdot \left(1 - 1{,}81 \cdot 10^{-4} \cdot 23\right) \quad \Rightarrow \quad L_0 = 717\, mm\ Hg$$

Umrechnung des Luftdrucks von [mm Hg] in [Pa]

$$p = 133{,}32 \cdot 717 \quad \Rightarrow \quad p = 95590\, Pa$$

Der Sättigungsdampfdruck von Wasser in Luft p_d kann für die vorliegende Temperatur T entweder einer Dampftafel entnommen oder über die Magnus-Formel berechnet werden.

$$p_d = 611{,}213 \cdot e^{\left(\frac{17{,}5043 \cdot T}{241{,}2 + T}\right)} = 611{,}213 \cdot e^{\left(\frac{17{,}5043 \cdot 23}{241{,}2 + 23}\right)} \Rightarrow \quad p_d = 2805\, Pa$$

(zum Vergleich: Dampftafel für Wasser bei T = 23°C $\Rightarrow$ $p_d = 2834\, Pa$)

Berechnung der um die Luftfeuchte korrigierten spezifischen Gaskonstante

$$R_f = \frac{287{,}05}{1 - 0{,}3773 \cdot \frac{\varphi \cdot p_d}{p}} = \frac{287{,}05}{1 - 0{,}3773 \cdot \frac{0{,}7 \cdot 2834}{95590}} \quad \Rightarrow \quad R_f = 289{,}32\, J/kg \cdot K$$

mit

$R_t = 287{,}05\, J/kg \cdot K$	spez. Gaskonstante von trockener Luft
$R_d = 461\, J/kg \cdot K$	spez. Gaskonstante von Wasserdampf
φ	relative Luftfeuchte
p_d	Sättigungsdampfdruck von Wasser in Luft
p	Luftdruck

Berechnung der um die Luftfeuchte korrigierten Dichte

$$\rho = \frac{p}{R_f \cdot T} = \frac{95590}{289{,}32 \cdot (23 + 273{,}15)} \qquad \Rightarrow \qquad \rho = 1{,}1156\, kg/m^3$$

Differenzdruckbestimmung durch Schrägrohrmanometer

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho_M \cdot h \cdot g = \rho_M \cdot l \cdot \sin\alpha \cdot g$$

$$\Delta p = 800 \cdot 0{,}1 \cdot sin 30 \cdot 9{,}81\; Pa \qquad \Rightarrow \qquad \Delta p = \overline{q} = 392{,}4\, Pa$$

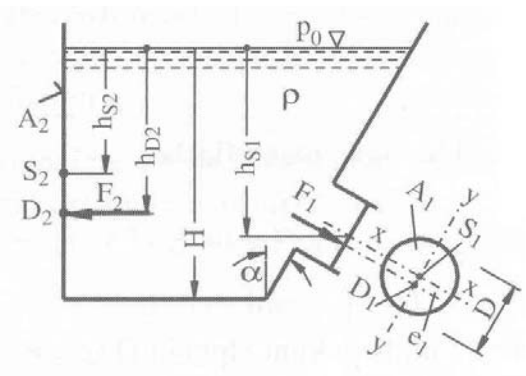
Geschwindigkeitsbestimmung

$$\Delta p = p_{total} - p_{statisch} = p_{dyn} = \overline{q} = \frac{\rho_{Luft}}{2} \cdot v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{\rho_{Luft}} \cdot (p_t - p)} = \sqrt{2 \cdot g \cdot \frac{\rho_M}{\rho_{Luft}} \cdot h} = \sqrt{2 \cdot g \cdot \frac{\rho_M}{\rho_{Luft}} \cdot l \cdot \sin\alpha}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{800}{1{,}1156} \cdot 0{,}1 \cdot sin 30}\; m/s \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v = 26{,}52\, m/s}$$

Üb. 2-10: Kraft auf eine Absperrklappe



h_{S1}	=	5 m
D	=	1 m
α	=	30 grd
ρ	=	10^3 kg/m³
H	=	7 m
B	=	10 m

1. Kraft F_1 auf die Absperrklappe?
2. Lage des Kraftangriffspunktes von F_1?
3. Drehmoment der Klappe bezüglich x-x?
4. Klappenlagerung bei x-x oder y-y?
5. Kraft F_2 auf die linke Wand?
6. Lage des Kraftangriffspunktes von F_2?

1. Kraft F_1 auf die Absperrklappe (= geneigte Fläche A)

$$F_1 = \rho \cdot g \cdot h_{S1} \cdot \frac{D^2 \cdot \pi}{4} = 10^3\, kg/m^3 \cdot 9{,}81 m/s^2 \cdot 5m \cdot \frac{1m^2 \cdot \pi}{4} = 38{,}524 \cdot 10^3\, N$$

2. Lage des Kraftangriffspunktes von F_1?

Abstand e zwischen Flächenschwerpunkt S und Druckpunkt D der Fläche A (in y-Richtung)

$$e = y_D - y_S = \frac{I_{Sx}}{y_S \cdot A}$$

mit $I_{Sx,Kreisfläche} = \dfrac{\pi \cdot D^4}{64}$, $A = \dfrac{\pi \cdot D^2}{4}$, $y_S = \dfrac{h_S}{\cos \alpha}$

folgt $e = \dfrac{\pi \cdot D^4 \cdot \cos\alpha \cdot 4}{64 \cdot h_{S1} \cdot \pi \cdot D^2} = \dfrac{D^2 \cdot \cos\alpha}{16 \cdot h_{S1}} = \dfrac{1m^2 \cdot \cos 30°}{16 \cdot 5m} = 0{,}0108\, m$

3. Drehmoment der Klappe bezüglich x-x?

$$M_{1,x} = F_1 \cdot e_1 = 38{,}524 \cdot 10^3\, N \cdot 0.0108\, m = 416.1\, Nm$$

4. Klappenlagerung bei x-x oder y-y?

Lagerung in der y-y-Achse ermöglicht momentenfreie Lagerung

5. Kraft F_2 auf die (senkrechte) linke Wand?

$$F_2 = \rho \cdot g \cdot h_{S2} \cdot A_2$$

mit $h_{S2} = \dfrac{H}{2}$, $A_2 = B \cdot H$

folgt $F = 10^3\, kg/m^3 \cdot 9{,}81 m/s^2 \cdot \dfrac{7\,m}{2} \cdot 10\,m \cdot 7\,m = 2{,}403 \cdot 10^6\, N$

6. Lage des Kraftangriffspunktes von F_2?

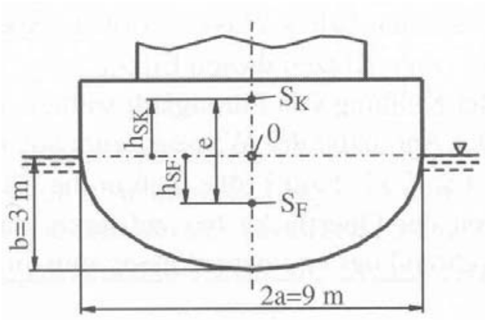
Abstand Druckpunkt zu Flächenschwerpunkt S_2

$$e = h_{D2} - h_{S2} = \frac{I_{Sx}}{h_{S2} \cdot A_2} \Rightarrow h_{D2} = h_{S2} + \frac{I_{Sx}}{h_{S2} \cdot A_2}$$

mit $I_{Sx,\mathrm{Rechteck}} = \dfrac{B \cdot H^3}{12}$

folgt $h_{D2} = \dfrac{H}{2} + \dfrac{B \cdot H^3 \cdot 2}{12 \cdot H \cdot B \cdot H} = \dfrac{7\,m}{2} + \dfrac{10\,m \cdot 7^3 m^3 \cdot 2}{12 \cdot 7\,m \cdot 10\,m \cdot 7\,m} = 4{,}667\, m$

**Üb. 2-11:	Stabilität eines Schiffsrumpfes**



Der eingetauchte Bereich entspricht einer zylindrischen Halbellipse mit der Gesamtlänge L

Gesucht ist die maximale Lage des Körperschwerpunkts über der Wasseroberfläche bis Instabilität eintritt

Halbellipse

$$h_{SF} = \frac{4 \cdot b}{3 \cdot \pi} = 1{,}273 m, \quad A = \frac{a \cdot b \cdot \pi}{2} = 21{,}21 m^2$$

verdrängtes Volumen V_F

$$V_F = \frac{a \cdot b \cdot \pi \cdot L}{2} = 21{,}21 \cdot L\, m^3$$

Trägheitsmoment der Schwimmfläche

$$I_0 = \frac{L \cdot (2 \cdot a)^3}{12} = 60{,}75 \cdot L\, m^4$$

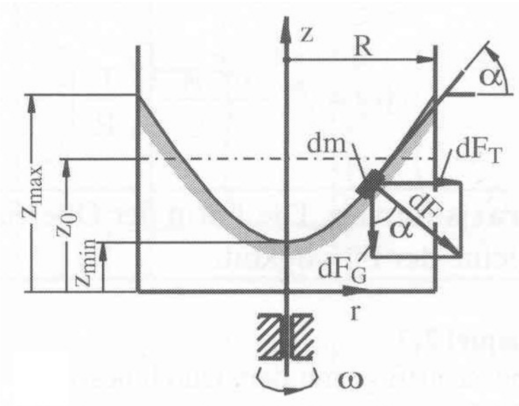
Metazentrische Höhe

$$h_M = \frac{I_0}{V_F} - e \overset{!}{>} 0 \;\Rightarrow\; e_{max} < \frac{I_0}{V_F} = \frac{60{,}75 m^4}{21{,}21 m^3} = 2{,}864 m$$

Maximale Schwerpunktshöhe über der Wasserlinie

$$h_{SK} < e_{max} - h_{SF} = 2{,}864 m - 1{,}273 m = 1{,}591 m$$

Üb. 2-12: Zentrifuge



D = 32 cm (Innendurchmesser)

z_0 = 8 cm (Füllhöhe)

1. Bei welcher Drehzahl n erreicht der Flüssigkeitsspiegel den Behälterboden?
2. Wie hoch steigt die Flüssigkeit in diesem Fall an der Wand des Behälters?

1. Bei welcher Drehzahl n erreicht der Flüssigkeitsspiegel den Behälterboden?

$$z(r) = z_0 + \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot R^2 \left[\left(\frac{r}{R} \right)^2 - \frac{1}{2} \right]$$

Für $r = 0$ wird $z = z_{min} = 0$

$$0 = z_0 + \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot R^2 \left[0 - \frac{1}{2} \right] \quad \omega = \frac{2}{R} \sqrt{z_0 \cdot g} = \frac{2}{0.16m} \cdot \sqrt{0{,}08m \cdot 9{,}81 m/s^2} = 11{,}074 s^{-1}$$

$$n = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{11{,}074 s^{-1}}{2 \cdot \pi} = 1{,}762 s^{-1}$$

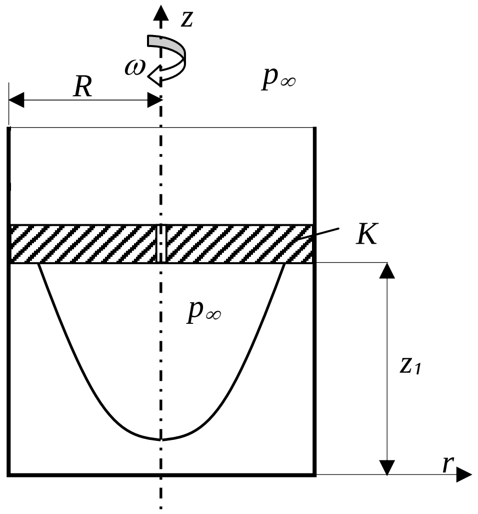
2. Wie hoch steigt die Flüssigkeit in diesem Fall an der Wand des Behälters?

$$z_{max} - \underbrace{z_{min}}_{=0} = \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot R^2 = \frac{11{,}074^2}{2 \cdot 9{,}81} \cdot 0{,}16^2 = 0.16m$$

oder

$$\frac{z_{max} - z_{min}}{2} = z_0 - z_{min} \quad \Rightarrow \quad z_{max} = 2 \cdot z_0 - \underbrace{z_{min}}_{=0} = 2 \cdot 0{,}08m = 0{,}16\ m$$

Üb. 2-13: Zentrifuge mit Kolben



In eine mit der Drehzahl n = 1 s^{-1} rotierende Zentrifuge wird ein reibungsfrei dichtender Kolben K gesetzt. Der Kolben besitzt in der Mitte eine Belüftungsbohrung, d.h. an der Oberseite und an der nicht benetzten Unterseite des Kolbens herrscht der gleiche Luftdruck p_∞.

Berechnen Sie die Masse m_K des Kolbens, wenn dieser auf einer Höhe z_1 = 1,0 m von der rotierenden Flüssigkeit getragen wird.

Behälterradius:	R	=	1,0 m
Füllstand bei ω = 0:	z_0	=	0,2 m
Dichte der Flüssigkeit:	ρ_{FL}	=	10^3 kg/m³
Umgebungsluftdruck:	p_∞	=	10^5 Pa

Gewichtskraft des fiktiven Volumens V_A über dem Kolben K entspricht der Kraft des rotierenden Fluids auf den Kolben, d.h.

$$m_A = \rho_{FL} \cdot V_A = m_K$$

Berechnung des fiktiven Volumens V_A mit $z_1 = 1{,}0\,[m]$ und $z_2 = z_{\max}$

$$z_2 = z_{\max} = z(r=R) = z_0 + \frac{\omega^2}{2\cdot g}\cdot R^2 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}2 + \frac{(2\cdot\pi)^2}{2\cdot 9{,}81}\cdot\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad z_2 = 1{,}206\,m$$

$$V_A = V_{Zylinder} - V_R = \frac{\pi}{4}\cdot d^2\cdot(z_2 - z_1) - V_R$$

Berechnung des Rotationsvolumens V_R:

$$V_R = \pi \cdot \int_{z_1}^{z_2} r^2(z)\,dz$$

$$z(r) = z_0 + \frac{\omega^2}{2\cdot g}\cdot R^2\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{1}{2}\right] \quad \Rightarrow \quad r^2(z) = \frac{2\cdot g}{\omega^2}\cdot(z - z_0) + \frac{1}{2}\cdot R^2$$

$$V_R = \pi\cdot\int_{z_1}^{z_2} r^2(z)\,dz = \pi\cdot\int_{z_1}^{z_2}\left[\frac{2\cdot g}{\omega^2}\cdot(z-z_0) + \frac{1}{2}\cdot R^2\right]dz = \pi\cdot\left[\frac{g}{\omega^2}\cdot z^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot R^2 - \frac{2\cdot g}{\omega^2}\cdot z_0\right)\cdot z\right]_{z_1}^{z_2}$$

$$V_R = \pi\cdot\left\{\left[\frac{g}{\omega^2}\cdot {z_2}^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot R^2 - \frac{2\cdot g}{\omega^2}\cdot z_0\right)\cdot z_2\right] - \left[\frac{g}{\omega^2}\cdot {z_1}^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot R^2 - \frac{2\cdot g}{\omega^2}\cdot z_0\right)\cdot z_1\right]\right\}$$

$$V_R = \pi\cdot\left\{\left[\frac{9{,}81}{4\cdot\pi^2}\cdot 1{,}206^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{2\cdot 9{,}81}{4\cdot\pi^2}\cdot 0{,}2\right)\cdot 1{,}206\right] - \left[\frac{9{,}81}{4\cdot\pi^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{2\cdot 9{,}81}{4\cdot\pi^2}\cdot 0{,}2\right)\right]\right\}$$

$$\Rightarrow \quad V_R = 0{,}614\,m^3$$

$$V_A = V_{Zylinder} - V_R = \frac{\pi}{4}\cdot d^2\cdot(z_2 - z_1) - V_R = \frac{\pi}{4}\cdot 2^2\cdot(1{,}206 - 1) - 0{,}614$$

$$\Rightarrow \quad V_A = 0{,}033\,m^3$$

$$\Rightarrow \quad m_K = \rho_{FL}\cdot V_A = 10^3\cdot 0{,}033 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m_K = 33{,}0\,kg}$$