Übung 2-1

Vor dem Antritt ihrer Fahrt in den Winterurlaub prüfen Sie an einer Tankstelle in München (H = 500 m) den Reifendruck an ihrem Fahrzeug. Das Manometer zeigt einen Druck von p_R = 2,3 bar an. Das Fahrzeug war über Nacht am Straßenrand geparkt und die Reifentemperatur entspricht der Umgebungstemperatur von T = -2°C. An diese Tag herrscht in München ein Luftdruck von p_M = 954 hPa (nicht umgerechnet auf Meeresniveau). Bei einem Tankstopp am Brennerpass (H = 1370 m) prüfen Sie erneut den Reifendruck. An der Tankstelle lesen Sie am dort angebrachten Barometer einen Luftdruck von p_H = 856 hPa ab. Die Reifen wurden infolge der Fahrt auf der Autobahn bereits warm gefahren und haben eine Temperatur von T_H = 30°C.

Welchen Druck zeigt das Manometer an der Tankstelle am Brennerpass an?

1. Absolutdruck im Reifen beim Start in München

$p_{\mathrm{R,abs,M}} = p_{\mathrm{R}} + p_{\mathrm{M}} = 2{,}3 \cdot 10^5 + 95400 = 3{,}254 \cdot 10^5 Pa = 3{,}254\ bar$

2. Luftdichte im Reifen:

Das Volumen des Reifens bleibt konstant, also kann sich die Luftdichte nicht ändern. Mit der spezifischen Gaskonstante für Luft von R = 287,05 J/kg·K gilt

$$\rho = \rho_{\mathrm{M}} = \rho_{\mathrm{H}} = \frac{p_{\mathrm{R,abs,M}}}{\mathrm{R} \cdot T_{\mathrm{M}}} = \frac{3{,}254 \cdot 10^5}{287{,}05 \cdot (-2 + 273{,}15)} = 4{,}181\ \mathrm{kg/m^3}$$

3. Absolutdruck im Reifen am Brennerpass

$$p_{\mathrm{R,abs,Brenner}} = \rho \cdot \mathrm{R} \cdot T_{\mathrm{H}} = 4{,}183 \cdot 287{,}05 \cdot (30 + 273{,}15) = 3{,}638 \cdot 10^5 \mathrm{Pa} = 3{,}638\ \mathrm{bar}$$

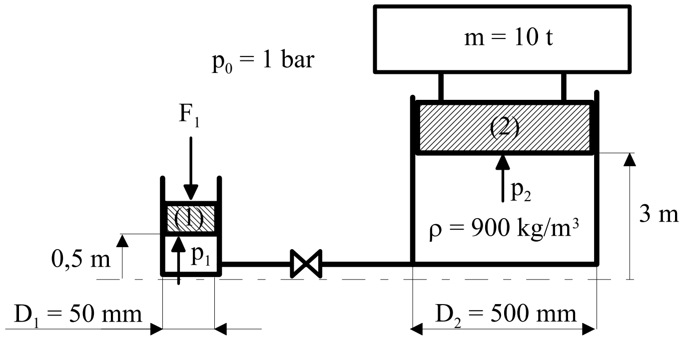
4. Manometeranzeige am Brennerpass

$$p_{\mathrm{R,Brenner}} = p_{\mathrm{R,abs,Brenner}} - p_{\mathrm{H}} = 3{,}638 \cdot 10^5 - 85600 = 2{,}782 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa} = 2{,}782\ \mathrm{bar}$$

Übung 2-2

Für die skizzierte hydraulische Presse sind folgende Fragen zu klären:

- Welche Kraft F_1 ist am Kolben (1) erforderlich um die Masse m = 10 t auf dem Kolben (2) zu halten
- Wie groß ist der Druck p_2 am Boden des Kolbens (2)?
- Wie groß ist der Fehler bei Vernachlässigung des Höhenunterschieds zwischen den Unterseiten der beiden Kolben?



Kräftebilanz am Kolben (1)

$$p_1 \cdot A_1 = F_1 + p_0 \cdot A_1 \;\Rightarrow\; p_1 = p_0 + \frac{F_1}{A_1}$$

Kräftebilanz am Kolben (2)

$$p_2 \cdot A_2 = F_2 + p_0 \cdot A_2 \;\Rightarrow\; p_2 = p_0 + \frac{F_2}{A_2}$$

Druckunterschied an den Unterseiten der beiden Kolben

$$p_1 - p_2 = \rho \cdot \mathrm{g} \cdot (z_1 - z_2) = \rho \cdot \mathrm{g} \cdot \Delta z$$

eingesetzt

$$p_0 + \frac{F_1}{A_1} - p_0 - \frac{F_2}{A_2} = \rho \cdot \mathrm{g} \cdot \Delta z$$

$$F_1 = \left(\frac{F_2}{A_2} + \rho \cdot \mathrm{g} \cdot \Delta z\right) \cdot A_1 = \left(\frac{4 \cdot m \cdot \mathrm{g}}{\pi \cdot {D_2}^2} + \rho \cdot \mathrm{g} \cdot \Delta z\right) \cdot \frac{\pi \cdot {D_1}^2}{4}$$

$$F_1 = \left(\frac{4 \cdot 10^4 \cdot 9{,}81}{\pi \cdot 0{,}5^2} + 900 \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}5\right) \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}05^2}{4} = 1024 \text{ N}$$

Druck am Boden des Kolbens (2)

$$p_2 = p_0 + \frac{F_2}{A_2} = p_0 + \frac{4 \cdot m \cdot \mathrm{g}}{\pi \cdot {D_2}^2} = 10^5 + \frac{4 \cdot 10^4 \cdot 9{,}81}{\pi \cdot 0{,}5^2} = 6 \cdot 10^5 \text{Pa} = 6 \text{ bar}$$

Fehler bei Vernachlässigung des Höhenunterschieds zwischen den Unterseiten der beiden Kolben

$${F_1}' = F_2 \cdot \frac{A_1}{A_2} = m \cdot \mathrm{g} \cdot \frac{{D_1}^2}{{D_2}^2} = 10^4 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{0{,}05^2}{0{,}5^2} = 981 \text{ N}$$

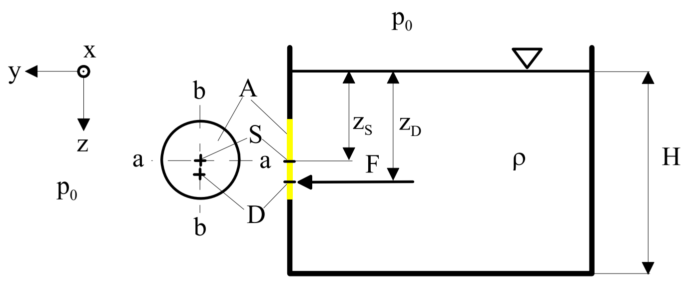
$$\Delta F = \frac{F_1 - {F_1}'}{F_1} = \frac{1024 - 981}{1024} = 0{,}042 = 4{,}2\%$$

Übung 2-3

Gesucht ist die Belastung auf die kreisförmige Klappe des skizzierten Behälters. Auf die Wasseroberfläche als auch auf die Seitenwände des Behälters wirkt der äußere Umgebungsdruck p_0.

Berechnen Sie das Moment M_x der Klappe um die Drehachse *a-a*, die Kraft F_{ges} auf die linke Seitenwand bei geschlossener Klappe und die Lage des Kraftangriffspunktes $z_{D,Wand}$ für folgende Werte:

p_0 = 1 bar, $\rho = 10^3$ kg/m³, z_S = 2 m, Klappenfläche A = 0,19635 m², Pegelstand im Behälter H = 6 m, Breite des Behälters B = 10 m



Moment M_x der Klappe um die Drehachse *a-a*:

Kraft im Klappenschwerpunkt

$$F = \rho \cdot \mathrm{g} \cdot z_S \cdot A = 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 2 \cdot 0{,}19635 = 3852{,}4 \text{ N}$$

Klappendurchmesser

$$d = \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot A} = \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot 0{,}19635} = 0{,}5 \text{ m}$$

Flächenträgheitsmoment der Klappe

$$I_{Sx} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$$

Druckpunktlage

$$z_D - z_S = \frac{I_{Sx}}{z_S \cdot A} = \frac{\pi \cdot d^4 \cdot 4}{64 \cdot z_S \cdot \pi \cdot d^2} = \frac{d^2}{16 \cdot z_S} = \frac{0{,}5^2}{16 \cdot 2} = 7{,}812 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Moment

$$M_x = F \cdot (z_D - z_S) = 3852{,}4 \cdot 7{,}812 \cdot 10^{-3} = 30{,}095 \text{ Nm}$$

Kraft F_{ges} auf die linke Seitenwand bei geschlossener Klappe:

Flächenschwerpunkt der linken Seitenwand

$$z_{S,Wand} = \frac{H}{2} = 3 \text{ m}$$

Kraft im Flächenschwerpunkt

$$F = \rho \cdot \mathrm{g} \cdot z_{S,Wand} \cdot H \cdot B = 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 10 = 1{,}7658 \cdot 10^6 \text{ N}$$

Lage des Kraftangriffspunktes z_D,Wand:

Flächenträgheitsmoment der Wand

$$I_{\mathrm{Sx}} = \frac{B \cdot H^3}{12}$$

Druckpunktlage

$$z_{\mathrm{D,Wand}} - z_{\mathrm{S,Wand}} = \frac{I_{\mathrm{Sx}}}{z_{\mathrm{S,Wand}} \cdot H \cdot B} = \frac{B \cdot H^3 \cdot 2}{12 \cdot H \cdot H \cdot B} = \frac{H}{6} = \frac{6}{6} = 1\ \mathrm{m}$$

Hinweis

Der Druckpunkt lässt sich auch graphisch durch die horizontale Projektion des Flächenschwerpunkts der Druckverteilung bestimmen. Sofern die belastete Fläche bis zum Wasserspiegel betrachtet wird, entspricht die Druckverteilung einem Dreieck.

Der Flächenschwerpunkt eines Dreiecks liegt bei 2/3 unterhalb der Spitze, also gilt

$$z_{\mathrm{D,Wand}} = \frac{2}{3} \cdot H = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4\ \mathrm{m}$$

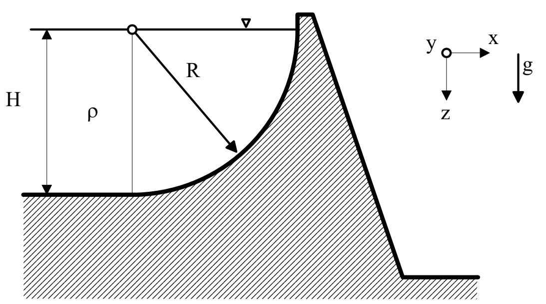
also

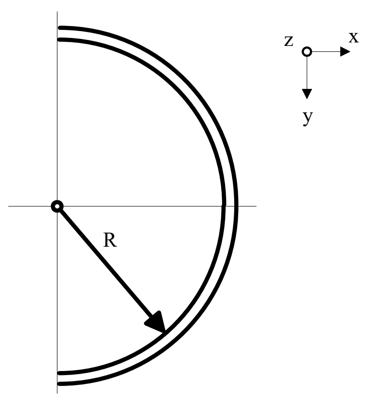
$$z_{\mathrm{D,Wand}} - z_{\mathrm{S,Wand}} = 4 - 3 = 1\ \mathrm{m}$$

Übung 2-4

Gesucht ist Kraft auf einen Staudamm, der die Form eines Kugelsegments hat.

Zu berechnen ist die Gesamtkraft F auf den Staudamm sowie die Lage des Kraftangriffspunkts P. Pegelstand H des Stausees und Radius R des Staudamms betragen $R = H = 100$ m.





Hinweis

Volumenschwerpunkt einer Viertel-Kugel (im Koordinatensystem der obigen Abbildung)

$$x_S = 0{,}375 \cdot R$$

Die Flächenschwerpunkte ergeben sich zu

Halbkreis:

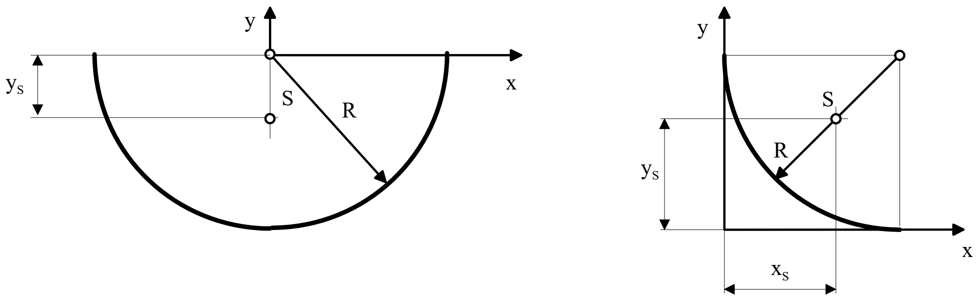
$$x_S = 0, y_S = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi}$$

Viertelkreis:

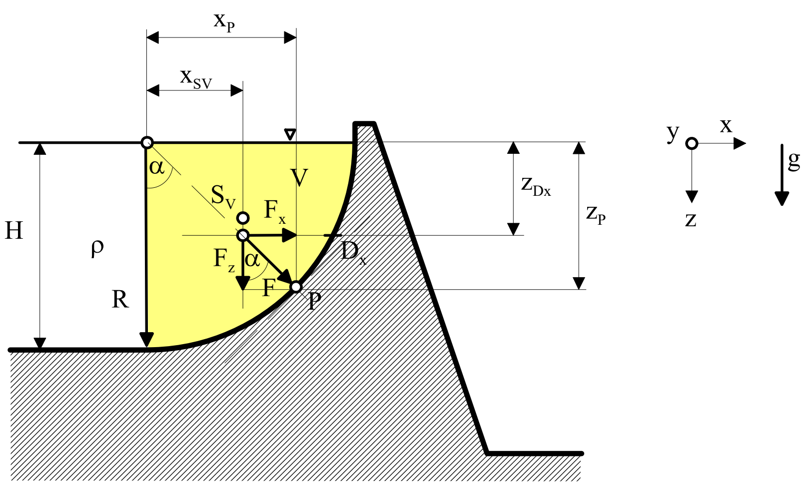
$$x_S = y_S \approx 0{,}576 \cdot R$$

Flächenträgheitsmoment eines Halbkreises

$$I_{Sx} = \frac{R^4}{72 \cdot \pi} \cdot (9 \cdot \pi^2 - 64)$$



Schwerpunktskoordinaten von Halb- und Viertelkreis



Horizontale Komponente F_x

Die Projektion der Staumauer in die y-z-Ebene ergibt eine Halbkreisfläche

$$A_x = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 100^2 = 15708\ \mathrm{m}^2$$

Flächenschwerpunkt von A_x

$$z_{Sx} = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi} = \frac{4 \cdot 100}{3 \cdot \pi} = 42{,}44\ \mathrm{m}$$

Betrag der Kraft F_x

$$F_x = p(z_{Sx}) \cdot A_x = \rho \cdot g \cdot z_{Sx} \cdot A_x = 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 42{,}44 \cdot 15708 = 6{,}54 \cdot 10^9\ \mathrm{N}$$

Druckpunktlage D_x

$$z_{Dx} = \frac{I_{Sy}}{z_{Sx} \cdot A_x} + z_{Sx}$$

mit

$$I_{Sy} = \frac{R^4}{72 \cdot \pi} \cdot (9 \cdot \pi^2 - 64)$$

folgt

$$z_{Dx} = \frac{R^2 \cdot (9 \cdot \pi^2 - 64)}{36 \cdot \pi \cdot z_{Sx}} + z_{Sx} = \frac{100^2 \cdot (9 \cdot \pi^2 - 64)}{36 \cdot \pi^2 \cdot 42{,}44} + 42{,}44 = 58{,}90\ \mathrm{m}$$

Vertikale Belastung F_z:

Volumenschwerpunkt S_V des virtuellen Volumens (= Viertelkugel)

$$x_{SV} = 0{,}375 \cdot R = 0{,}375 \cdot 100 = 37{,}5\ \mathrm{m}$$

Die Wirkungslinie der vertikalen Kraft F_z verläuft durch den Volumenschwerpunkt S_V.

$$F_z = \rho \cdot g \cdot V_{\mathrm{virtuell}} = \rho \cdot g \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 100^3 = 1{,}0273 \cdot 10^{10}\mathrm{N}$$

Gesamtbelastung auf den Staudamm

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_z = \begin{pmatrix} F_x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}54 \cdot 10^9 \\ 1{,}0273 \cdot 10^{10} \end{pmatrix}$$

mit

$$F = \sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2} = \sqrt{(6{,}54 \cdot 10^9)^2 + (1{,}0273 \cdot 10^{10})^2} = 1{,}218 \cdot 10^{10}\ \mathrm{N}$$

Schnittpunkt der horizontalen mit der vertikalen Kraftkomponente

$$x = x_{\mathrm{SV}} = 37{,}5\ \mathrm{m}$$

$$z = z_{\mathrm{Dx}} = 58{,}9\ \mathrm{m}$$

Kraftangriffspunkt der resultierenden Gesamtkraft

Die Gesamtkraft steht senkrecht auf der Kugeloberfläche und dadurch verläuft die Wirkungslinie durch den Kugelmittelpunkt.

$$\tan\alpha = \frac{F_{\mathrm{x}}}{F_{\mathrm{z}}} \Rightarrow \alpha = \mathrm{atan}\left(\frac{F_{\mathrm{x}}}{F_{\mathrm{z}}}\right) = \mathrm{atan}\left(\frac{6{,}54 \cdot 10^{9}}{1{,}0273 \cdot 10^{10}}\right) = 32{,}48°$$

$$x_{\mathrm{P}} = R \cdot \sin\alpha = 100 \cdot 0{,}537 = 53{,}7\ \mathrm{m}$$

$$z_{\mathrm{P}} = R \cdot \cos\alpha = 100 \cdot 0{,}844 = 84{,}4\ \mathrm{m}$$

Übung 2-5

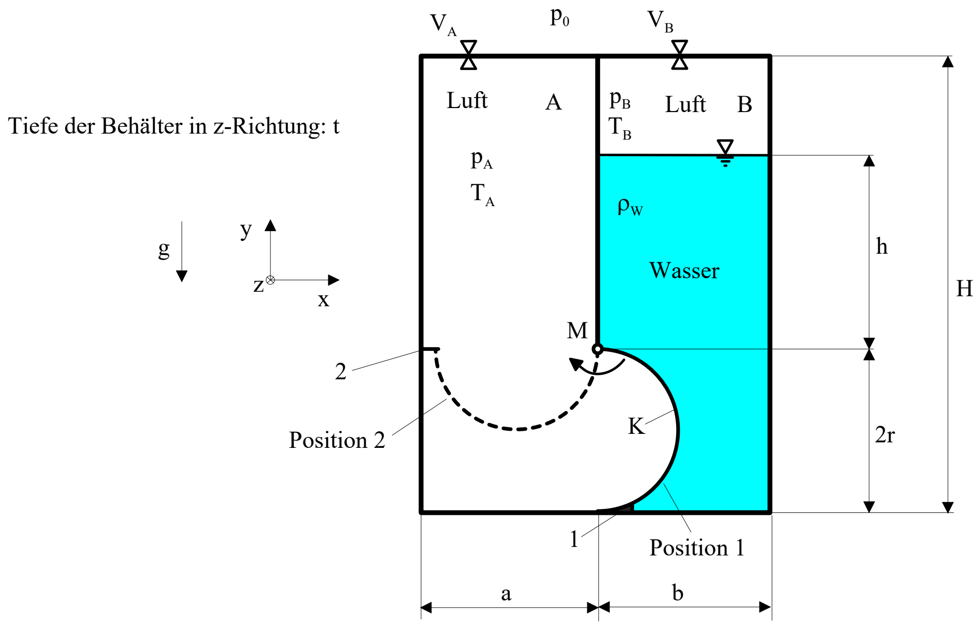
Zwei Behälter sind durch eine Zwischenwand getrennt. Im Punkt *M* ist eine drehbare halbkreisförmige Klappe *K* gelagert, die sich zwischen den Endpositionen 1 und 2 bewegen kann und in den Endpositionen abdichtet. Behälter *A* ist mit Luft, Behälter *B* ist mit Luft und Wasser befüllt. An der Oberseite der Behälter befindet sich je ein Ventil V_A und V_B. Außen herrscht der Umgebungsdruck p_0. Die Gewichtskräfte der Klappe und der Luft sind zu vernachlässigen.

1. Ventil V_A ist geschlossen, Ventil V_B ist geöffnet. Der Druck p_A ist so groß, dass die Klappe in Position 1 gehalten wird.

Geben Sie die Kräfte F_x und F_y auf die Klappe *K* als Funktion der in der Zeichnung gegebenen Größen an.

2. Ventil V_A und Ventil V_B sind geschlossen.

Bestimmen Sie den erforderlichen Luftdruck p_A im Behälter *A*, so dass die Klappe *K* gerade noch in Position 2 gehalten wird und das Moment *M* um den Drehpunkt verschwindet als Funktion der in der Zeichnung gegebenen Größen.



1. Klappe in Position (1)

Behälter A

$$F_{A,x} = p_A \cdot A_x = p_A \cdot 2 \cdot r \cdot t$$
$$F_{A,y} = 0$$

Hinweis

Da sich im linken Behälter ein Gas (Luft) befindet herrscht in *y*-Richtung ein nahezu konstanter Druck. Die Kräfte in y-Richtung heben sich also auf.

Behälter B

$$p_B = p_0$$
$$F_{B,x} = [p_B + \rho \cdot g \cdot (h + r)] \cdot A_x = [p_B + \rho_W \cdot g \cdot (h + r)] \cdot 2 \cdot r \cdot t$$
$$F_{B,y} = \rho_W \cdot V \cdot g = \rho_W \cdot \frac{\pi}{2} \cdot r^2 \cdot t \cdot g$$

Resultierende Kräfte in *x*-Richtung

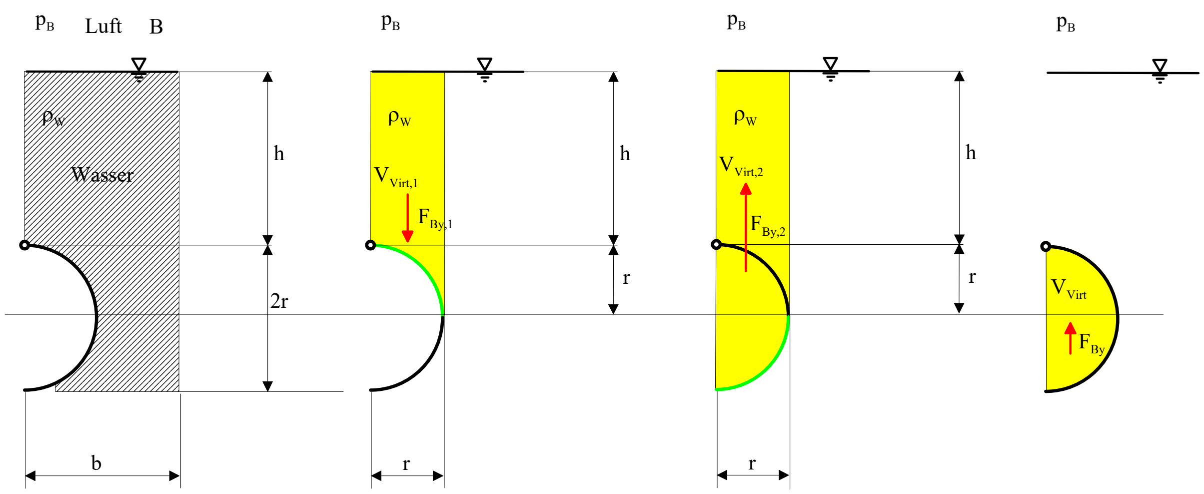
$$F_x = F_{A,x} - F_{B,x} = p_A \cdot 2 \cdot r \cdot t - [p_B + \rho_W \cdot g \cdot (h + r)] \cdot 2 \cdot r \cdot t$$
$$F_x = 2 \cdot r \cdot t \cdot [p_A - p_B + \rho_W \cdot g \cdot (h + r)]$$

Resultierende Kräfte in y-Richtung

$$F_y = F_{B,y} = \rho_W \cdot \frac{\pi}{2} \cdot r^2 \cdot t \cdot g$$

Hinweis

Da sich im rechten Behälter eine Flüssigkeit (Wasser) befindet ergeben sich die Belastungen in vertikaler Richtung (*y*-Richtung) aus der Differenz der beiden virtuellen Volumina, durch welches die Klappe belastet wird. Es verbleibt damit lediglich das Verdrängungsvolumen V_{Virt}, das durch die halbkreisförmige Klappe gebildet wird. Das entspricht auch dem Prinzip, dass der Auftrieb eines Körpers dem Volumen des verdrängten Fluides, beziehungsweise der Druckdifferenz wischen seiner Ober- und seiner Unterseite entspricht.



---

2. Klappe in Position (2)

Kräfte in *x*-Richtung

Behälter A

$$F_{A,x} = 0$$

Behälter B

$$F_{B,x} = 0$$

Kräfte in *y*-Richtung

Behälter A

$$F_{A,y} = p_A \cdot A_y = p_A \cdot 2 \cdot r \cdot t$$

Behälter B

$$F_{B,y} = p_B \cdot A_y + g \cdot \rho_W \cdot V_{Virt.} = p_B \cdot 2 \cdot r \cdot t + g \cdot \rho_W \cdot \left(h \cdot 2 \cdot r + \frac{\pi}{2} \cdot r^2\right) \cdot t$$

Momentengleichgewicht um den Drehpunkt *M*

$$M_M = 0$$

$$F_{A,y} \cdot r - F_{B,y} \cdot r = 0$$

Also gilt

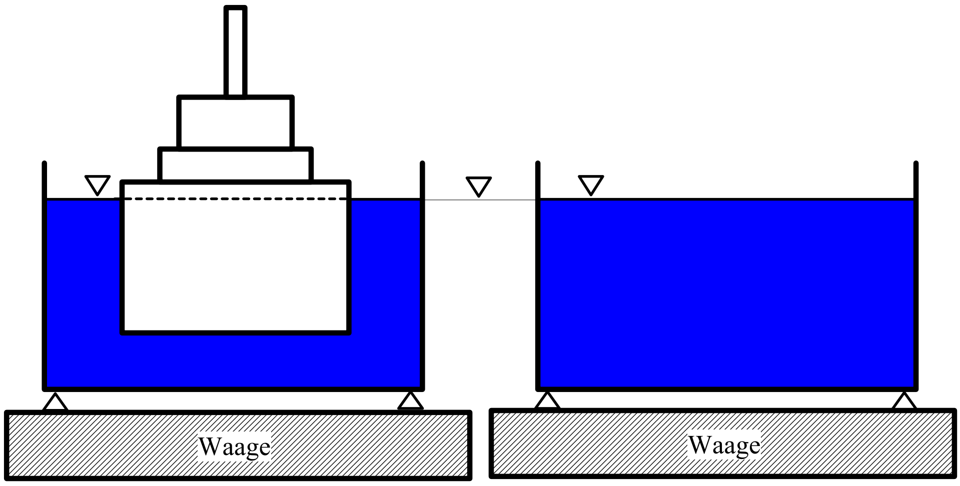
$$p_A \cdot 2 \cdot r \cdot t = p_B \cdot 2 \cdot r \cdot t + g \cdot \rho_W \cdot \left(h \cdot 2 \cdot r + \frac{\pi}{2} \cdot r^2\right) \cdot t$$

$$p_A = p_B + g \cdot \rho_W \cdot h + g \cdot \rho_W \cdot \frac{\pi}{4} \cdot r$$

Übung 2-6

Bei einem Ausflug ins Elsass kommen Sie an dem Schiffshebewerk in Saint-Louis-Arzviller vorbei und bestaunen die Ingenieursleistung aus dem 20. Jahrhundert. Hierbei werden Schiffe in einer großen Wanne mit einem Schrägaufzug über einen Höhenunterschied von 44,55 m befördert. Da zwei Wannen im Gegenbetrieb, ähnlich den Gondeln einer Seilbahn arbeiten, muss bei der Bewegung der beiden 900t schweren Wannen lediglich die Reibung ausgeglichen werden. Dazu sind zwei Elektromotoren mit gerade einmal je 88kW ausreichend.

Eine der am häufigsten gestellten Fragen lautet: Ist die Wanne mit dem Schiff schwerer als die Wanne ohne Schiff?



Zur Beantwortung dieser Frage sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Der Pegelstand in der Wanne ist mit dem Schiff genauso hoch wie ohne das Schiff. Das wäre beispielsweise der Fall, wenn die Wanne vor der Einfahrt des Schiffs bis zum oberen Rand gefüllt ist. Das von dem Schiffsrumpf verdrängte Wasser läuft einfach über und der Pegelstand bleibt konstant.

2. Die Wanne ist bei der Einfahrt des Schiffes nicht vollständig gefüllt. Infolge der Verdrängung durch den Schiffsrumpf steigt der Pegel in der Wanne entsprechend an. Ein eher theoretischer Fall, der bei geöffneten Schleusentoren bei der Einfahrt in der Praxis etwas schwierig zu bewerkstelligen wäre.

Sie werden es bereits ahnen: Solange der Pegelstand in der Wanne konstant bleibt, bleibt auch die Belastung auf der (fiktiven) Waage konstant. Das Schiff verdrängt ebenso viel Wasser, wie es selbst wiegt (Prinzip des Archimedes).

Anders gestalten sich die Verhältnisse, wenn die Wassermenge in der Wanne konstant bleibt. Dann erhöht sich die Belastung auf der Waage entsprechend dem Gewicht des Schiffes.

Übung 2-7

Angesichts der Diskussion um den Klimawandel gilt es die Frage zu klären, um wieviel der Meeresspiegel ansteigen wird, wenn das gesamte arktische Eis abtaut. Diese Frage berührt Sie besonders, da Sie vor der schwierigen Entscheidung stehen, sich für eine Berghütte in den Alpen, ein Ferienhaus an der französischen Atlantikküste oder für ein Hotel mit Tauchbasis auf den Malediven zu entscheiden.

Gehen Sie bei der rechnerischen Abschätzung von folgenden Werten aus:

Mittlere Dichte von Eis: $\rho_{\text{Eis}} = 920$ kg/m³

Mittlere Dichte von Meerwasser: $\rho_{\text{Meerwasser}} = 1025$ kg/m³

1. Zur Klärung dieser Frage betrachten Sie zuerst die Verhältnisse an einem Eisberg.

Welcher Anteil des Eisbergs befindet sich unterhalb der Wasserlinie und welcher Anteil liegt oberhalb der Wasserlinie?

Schwimmbedingung: Gewichtskraft = Auftriebskraft

$$F_{\text{G}} = F_{\text{A}}$$

$$\rho_{\text{Eis}} \cdot \text{g} \cdot V_{\text{Eis,gesamt}} = \rho_{\text{Meerwasser}} \cdot \text{g} \cdot V_{\text{Eis,getaucht}}$$

$$\frac{V_{\text{Eis,getaucht}}}{V_{\text{Eis,gesamt}}} = \frac{\rho_{\text{Eis}}}{\rho_{\text{Meerwasser}}} = \frac{920}{1025} \approx 0{,}9$$

das heiß, dass ungefähr 90% des Eisbergs unterhalb der Wasserlinie liegen und nur 10% herausragen. Pech für die Titanic …

2. Veränderung des Meeresspiegels bei abschmelzendem Eisberg:

Auch hier gilt zunächst die Schwimmbedingung

$$F_{\text{G}} = F_{\text{A}}$$

$$\rho_{\text{Eis}} \cdot \text{g} \cdot V_{\text{Eis,gesamt}} = \rho_{\text{Meerwasser}} \cdot \text{g} \cdot V_{\text{Eis,getaucht}}$$

$$V_{\text{Eis,gesamt}} = V_{\text{Eis,getaucht}} \cdot \frac{\rho_{\text{Meerwasser}}}{\rho_{\text{Eis}}}$$

Auch wenn der Eisberg schmilzt, bleibt die Masse konstant, also gilt

$$m_{\text{Eis}} = m_{\text{Meerwasser}}$$

$$\rho_{\text{Eis}} \cdot V_{\text{Eis,gesamt}} = \rho_{\text{Meerwasser}} \cdot V_{\text{Meerwasser}}$$

$$\rho_{\text{Eis}} \cdot V_{\text{Eis,getaucht}} \cdot \frac{\rho_{\text{Meerwasser}}}{\rho_{\text{Eis}}} = \rho_{\text{Meerwasser}} \cdot V_{\text{Meerwasser}}$$

$$V_{\text{Eis,getaucht}} = V_{\text{Meerwasser}}$$

Das Volumen des unter der Wasserlinie liegenden Eisbergs ist also identisch mit dem Volumen, das sich ergibt, wenn der Eisberg vollständig geschmolzen ist. Der Pegelstand ändert sich also keinen Millimeter. Dieses Experiment können Sie zu Hause ganz einfach wiederholen, indem Sie in ein Glas Wasser mehrere Eiswürfel geben, den Pegelstand markieren und abwarten bis das Eis geschmolzen ist. Sie werden feststellen, dass der Pegelstand im Glas konstant bleibt.

Sie werden es schon ahnen; die Geschichte hat einen winzigen Schönheitsfehler. Gemäß der Aufgabenstellung sollte lediglich das arktische Eis, also in der Nordpolregion betrachtet werden. Hier schwimmt das meiste Eis im Wasser und ein Abtauen hätte zwar gravierende Folgen, beispielsweise für die Population der Eisbären aber keinen Einfluss auf den Meeresspiegel. Ganz anders verhält es sich mit den Eismassen, die in Form von Gletschern oder am Südpol auf dem Festland gebunden sind. Hier führt ein Abschmelzen natürlich zu einer Massezufuhr in die Ozeane und der Meeresspiegel wird unweigerlich ansteigen. Inselstaaten, wie beispielsweise Tuvalu[1] werden dadurch sehr wahrscheinlichen in den kommenden 100 Jahren von der Landkarte verschwinden.

Übung 2-8

Berechnen Sie den Messfehler einer konventionellen Badezimmerwaage für einen leicht untergewichtigen Menschen mit einer Gesamtmasse von m_K = 100 kg.

Die Messung findet auf Meeresniveau statt, das heißt die Luftdichte beträgt ρ_Luft = 1,225 kg/m^3

Zunächst benötigen Sie das Volumen des Menschen. Mit etwas Geschick können Sie beim Baden Ihren Körper im Wasser in einen Schwebezustand versetzen. Das bedeutet, dass die mittlere Dichte des menschlichen Körpers ungefähr der Dichte von Wasser entspricht, also ρ_K = 10^3 kg/m^3. Das ergibt bei einer Gesamtmasse von m_K = 100 kg ein Verdrängungsvolumen von V_K = 0,1 m^3. Der Auftrieb ergibt sich damit zu

$$F_\mathrm{A} = \rho_\mathrm{Luft} \cdot \mathrm{g} \cdot V_\mathrm{K} = 1{,}225 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}1 = 1{,}2\ \mathrm{N}$$

Das entspricht einer Fehlanzeige auf der Waage von Δm = 0,12 kg.

---

1 **Tuvalu:** (Fakavae Aliki-Malo i Tuvalu) Inselstaat im Pazifischen Ozean mit ca. 10.000 Einwohnern. Die höchste Erhebung liegt fünf Meter über dem Meeresspiegel (Stand 2018)

Übung 2-9

Sie schwimmen bei Bregenz, am Südostufer des Bodensees in Ufernähe und blicken über den See in nordwestlicher Richtung. Wie hoch müsste in Konstanz, das in ungefähr 44 km Entfernung liegt, ein Turm sein, so dass Sie die Turmspitze noch sehen könnten?

Mit einem mittleren Erdradius von $r_E = 6378$ km ergibt sich für die Entfernung zwischen Bregenz und Konstanz von $s = 44$ km der Winkel φ zu

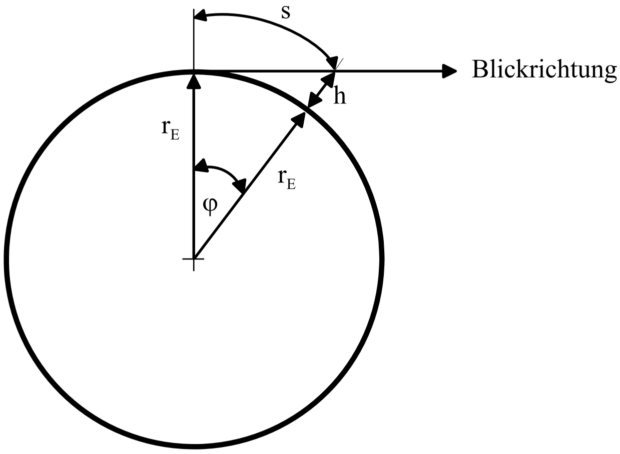
$$\varphi = \frac{360}{2 \cdot \pi \cdot r_E} \cdot s = \frac{360}{2 \cdot \pi \cdot 6378} \cdot 44 = 0{,}3953°$$

Die Bogenlänge s kann näherungsweise mit der Ankathete des Dreiecks gleichgesetzt werden. Die Turmhöhe h ergibt sich damit zu

$$\cos\varphi = \frac{r_E}{r_E + h}$$

also

$$h = r_E \cdot \left(\frac{1}{\cos\varphi} - 1\right) = 6378 \cdot \left(\frac{1}{\cos 0{,}3953} - 1\right) = 0{,}152 \text{ km} = 152\text{m}$$



Alternativ

$${r_E}^2 + s^2 = (r_E + h)^2$$

$$h = \sqrt{{r_E}^2 + s^2} - r_E = \sqrt{6378^2 + 44^2} - 6378 = 0{,}152 \text{ km} = 152\text{m}$$

Dieses Ergebnis ist sicher etwas überraschend, insbesondere wenn Sie sich mit dem Gedanken tragen für Ihren nächsten Urlaub eine Kreuzfahrt zu buchen. Sollten Sie über Bord gehen, sind Ihre Chancen von einem vorbeifahrenden Schiff gesehen zu werden denkbar schlecht. Diese Rechnung gilt natürlich nur bei spiegelglatter See. Selbst bei leichtem Seegang gehen Ihre Chancen gesehen zu werden ziemlich sicher auf null zurück.

Übung 2-10

Während Sie beim Frühstück den Zucker in Ihrer Kaffeetasse verrühren, überlegen Sie sich, mit welcher Maximalgeschwindigkeit Sie den Kaffee umrühren können, bevor dieser über den Tassenrand schwappt und wie tief das Minimum der freien Oberfläche unterhalb des Tassenrands liegt.

Ihre Kaffeetasse hat einen Innendurchmesser von d = 76 mm und eine Höhe H = 80 mm. Im Ruhezustand liegt der Pegelstand des Kaffees bei z_0 = 65 mm.

1. Berechnung der maximalen Rotationsgeschwindigkeit:

Zur Beantwortung dieser existentiellen Frage ziehen Sie die Bestimmungsgleichung für die freie Oberfläche eines rotierenden Fluids zu Rate.

$$z(r) = z_0 + \frac{\omega^2}{2 \cdot \mathrm{g}} \cdot \left(r^2 - \frac{R^2}{2} \right)$$

Die maximale Steighöhe entspricht dem Tassenrand, also gilt $z(r = R) = H$:

$$H = z_0 + \frac{\omega^2}{2 \cdot \mathrm{g}} \cdot \left(R^2 - \frac{R^2}{2} \right)$$

also

$$H = z_0 + \frac{\omega^2}{2 \cdot \mathrm{g}} \cdot \frac{R^2}{2}$$

und somit

$$\omega = \sqrt{(H - z_0) \cdot \frac{4 \cdot \mathrm{g}}{R^2}} = \sqrt{(0{,}08 - 0{,}065) \cdot \frac{4 \cdot 9{,}81}{0{,}038^2}} = 20{,}19 \, \frac{1}{\mathrm{s}}$$

oder

$$n = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = 3{,}2 \, s^{-1}$$

2. Berechnung des tiefsten Punkts:

Auch hier hilft wieder Bestimmungsgleichung für die freie Oberfläche. Der tiefste Punkte wird sich in der Tassenmitte, also bei $z(r = 0) = z_{\min}$ befinden.

$$z_{min} = z_0 + \frac{\omega^2}{2 \cdot \mathrm{g}} \cdot \left(-\frac{R^2}{2} \right) = 0{,}065 - \frac{20{,}19^2}{2 \cdot 9{,}81} \cdot \frac{0{,}038^2}{2} = 0{,}05 \text{ m}$$

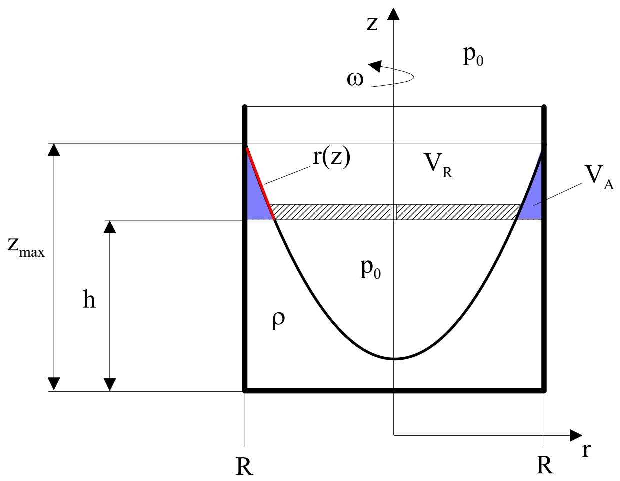
Übung 2-11

Sie betrachten wieder eine Kaffeetasse mit einem Innendurchmesser von d = 78 mm und einer Höhe von h = 80 mm. Der Pegelstand im Ruhezustand beträgt z_0 = 65 mm. Auf Ihrer kleinen Drehbank in Ihrem Keller fertigen Sie sich einen Deckel, der sich passgenau in das Innere der Tasse einfügt und diese zur Wandseite hin abdichtet.

Welche Masse hat der Deckel, wenn bei einer Rotationsgeschwindigkeit von $n = 3{,}18\ s^{-1}$ der Deckel von dem rotierenden Fluid mit seiner Unterseite in eine Höhe von h = 75 mm getragen wird?

Die Gewichtskraft des Deckels entspricht der von innen wirkenden Aufdruckkraft des Fluids, also der Gewichtskraft des virtuell über der Deckelunterseite liegenden Volumens V_A, also

$$m_D = \rho \cdot V_A$$



Integrationsgrenze $z_{max} = z(r = R)$, $\omega = 2 \cdot \pi \cdot n = 20\ s^{-1}$

$$z(R) = z_0 + \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot R^2 \left(\left(\frac{R}{R}\right)^2 - \frac{1}{2} \right)$$

$$z(R) = z_0 + \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot R^2 \left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}065 + \frac{20^2}{2 \cdot 9{,}81} \cdot 0{,}038^2 \left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}0797 \approx 0{,}08\ m$$

Rotationsvolumens V_R:

$$V_R = \pi \cdot \int_h^{z_{max}} r(z)^2 \mathrm{d}z$$

aus

$$z(r) = z_0 + \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot R^2 \left(\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{1}{2} \right)$$

folgt

$$r(z)^2 = \frac{2 \cdot g}{\omega^2} \cdot (z - z_0) + \frac{1}{2} \cdot R^2$$

$$V_R = \pi \cdot \int_h^{z_{max}} r(z)^2 \mathrm{d}z = \pi \cdot \int_h^{z_{max}} \left[\frac{2 \cdot g}{\omega^2} \cdot (z - z_0) + \frac{1}{2} \cdot R^2 \right] \mathrm{d}z$$

$$V_\mathrm{R} = \pi \cdot \left[\frac{g}{\omega^2} \cdot z^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot R^2 - \frac{2 \cdot g}{\omega^2} \cdot z_0\right) \cdot z\right]_h^{z_{max}}$$

$$V_\mathrm{R} = \pi \cdot \left\{\left[\frac{g}{\omega^2} \cdot {z_{max}}^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot R^2 - \frac{2 \cdot g}{\omega^2} \cdot z_0\right) \cdot z_{max}\right] - \left[\frac{g}{\omega^2} \cdot h^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot R^2 - \frac{2 \cdot g}{\omega^2} \cdot z_0\right) \cdot h\right]\right\}$$

$$\begin{aligned} V_\mathrm{R} = \pi \cdot \Bigg\{&\left[\frac{9{,}81}{20^2} \cdot 0{,}08^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot 0{,}039^2 - \frac{2 \cdot 9{,}81}{20^2} \cdot 0{,}065\right) \cdot 0{,}08\right] \\ &- \left[\frac{9{,}81}{20^2} \cdot 0{,}075^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot 0{,}039^2 - \frac{2 \cdot 9{,}81}{20^2} \cdot 0{,}065\right) \cdot 0{,}075\right]\Bigg\} \end{aligned}$$

$$V_\mathrm{R} = 2{,}1577 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^3$$

Berechnung des virtuellen Volumens V_A

$$V_A = V_\mathrm{Zyl.} - V_\mathrm{R} = \pi \cdot R^2 \cdot (z_\mathrm{max} - h) - V_\mathrm{R}$$

$$V_A = \pi \cdot 0{,}039^2 \cdot (0{,}08 - 0{,}075) - 2{,}1577 \cdot 10^{-5} = 2{,}315 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3$$

Berechnung der Masse m_D des Deckels

$$m_\mathrm{D} = \rho \cdot V_\mathrm{A} = 10^3 \cdot 2{,}315 \cdot 10^{-6} = 2{,}315 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg} \approx 2{,}3\ \mathrm{g}$$