

3 Aerostatik.....	2
3.1 Atmosphäre der Erde.....	2
3.1.1 Die Erde als Wärmekraftmaschine.....	2
3.1.2 Aufbau der Erdatmosphäre	8
3.2 Abhängigkeit des Luftdrucks von der Höhe.....	10
3.2.1 Luftdruck.....	10
3.2.2 Kräftegleichgewicht an einem Volumenelement	11
3.3 Internationale Standardatmosphäre (ISA)	12
3.3.1 Temperaturverteilung der Standardatmosphäre	12
3.3.2 Definitionen der Höhe.....	17

3 Aerostatik

3.1 Atmosphäre der Erde

3.1.1 Die Erde als Wärmekraftmaschine

Wärmekraftmaschine

- Umwandlung von thermischer Energie in mechanische Arbeit
- Atmosphäre der Erde ist ein dynamisches System, dem in auf der sonnenzugewandten Seite durch Absorption von Sonnenstrahlung Wärme zugeführt und auf der sonnenabgewandten Seite Wärme durch Abstrahlung entzogen wird

Erhöhung der Komplexität

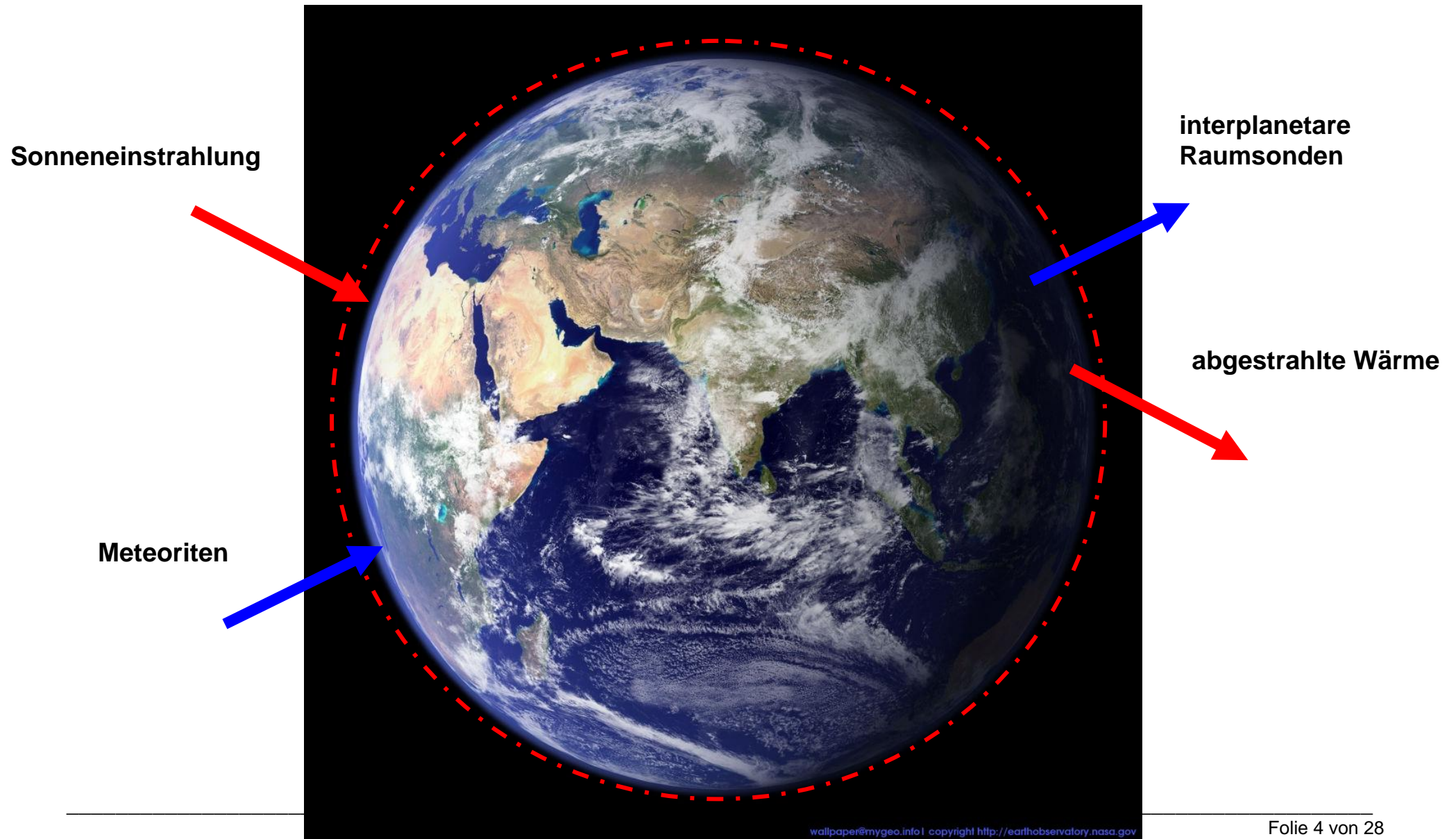
- Erdrotation \Rightarrow Permanente Änderung der Strahlungsverhältnisse auf der Oberfläche

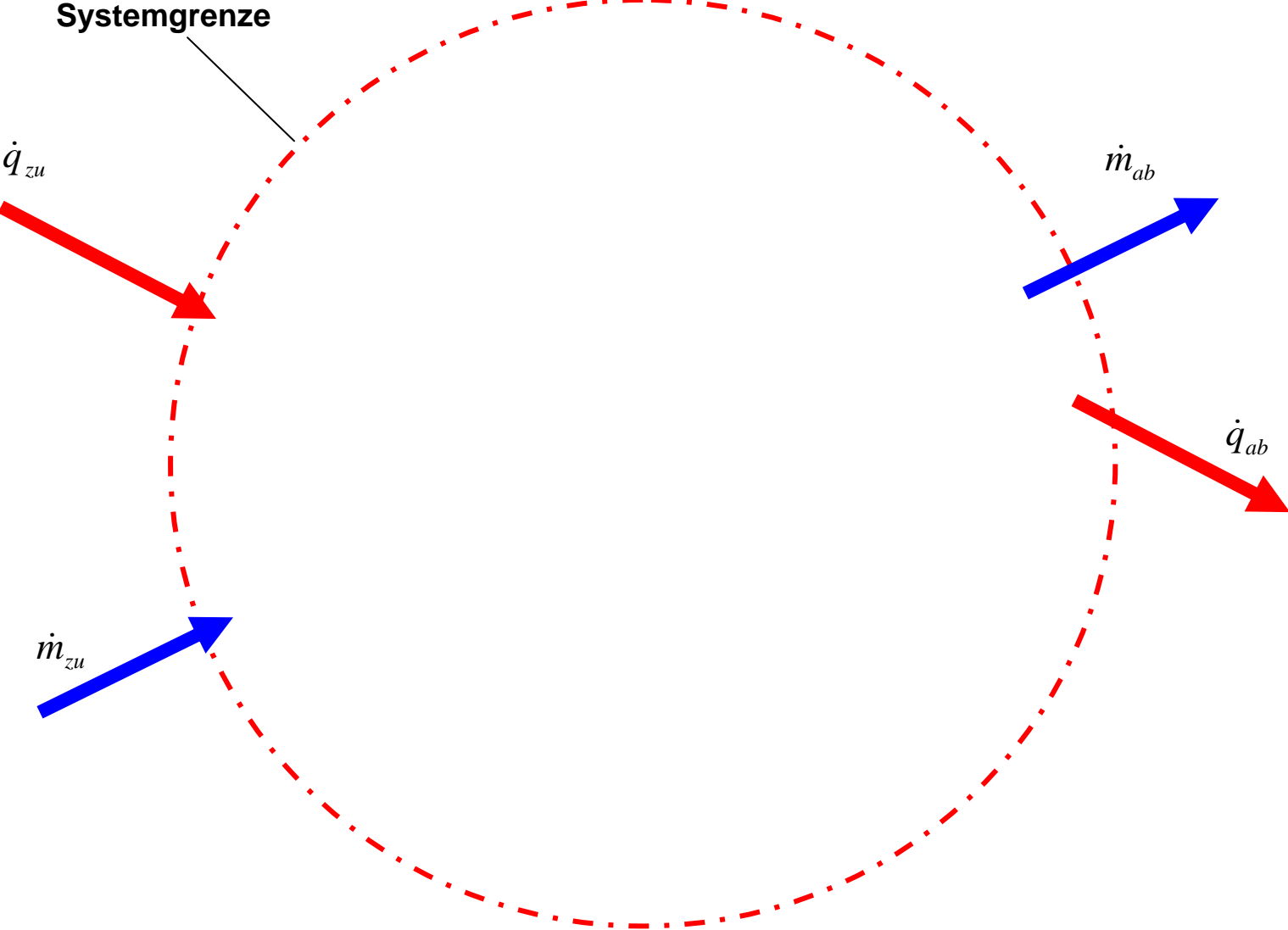
Wetter

- Ergebnis eines Wärmeaustauschprozesses



wallpaper@mygeo.info | copyright <http://earthobservatory.nasa.gov>





Zusammensetzung der Luft

Gas		Volumenprozent
Stickstoff	N ₂	78,09
Sauerstoff	O ₂	20,95
Argon	Ar	0,93
Kohlendioxid	CO ₂	0,03 (schwankt)
Neon	Ne	0,0018
Helium	He	0,0005
Krypton	Kr	0,0001
Wasserstoff	H ₂	0,00005
Xenon	Xe	0,000008
Ozon	O ₃	0,00001 (schwankt)

Temperatur [°C]	Wasserdampf [g/m ³]
-20	1,0
-10	2,3
0	4,9
10	9,3
20	17,2
30	30

Einfluß der Luftfeuchtigkeit

- Wasserdampfanteil in der Atmosphäre ist abhängig von Lufttemperatur und relativer Feuchte
- Insbesondere die spezifische Gaskonstante R unterliegt einem Feuchteeinfluß

$$R_{\text{feuchte Luft}} = \frac{R_{\text{trockene Luft}}}{1 - \frac{0,377 \cdot \varphi \cdot p_s}{p}}$$

$R_{\text{trockene Luft}}$ = spez. Gaskonstante (287,05 [J/kgK])

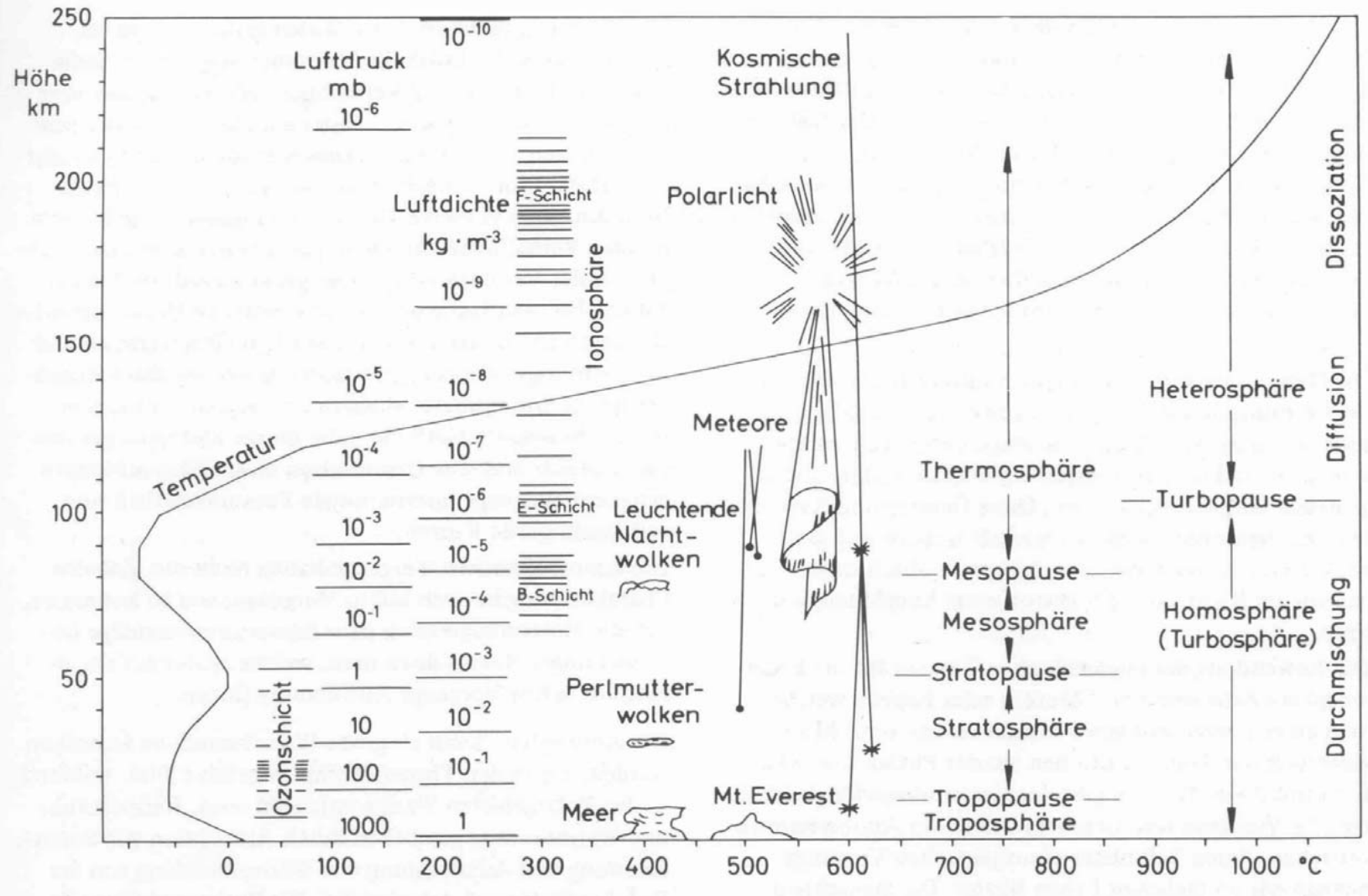
p_s = Sättigungsdruck von Wasser (Dampfdrucktafel oder Magnus-Formel)

p = Luftdruck

φ = Relative Luftfeuchte, beschreibt das prozentuale Verhältnis zur gesättigten Luft

T [°]	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
p_s [Pa]	611	872	1227	1704	2337	3166	4241	5622	7375	9582	12340	15740	19920

3.1.2 Aufbau der Erdatmosphäre



3.2 Abhängigkeit des Luftdrucks von der Höhe

3.2.1 Luftdruck

Inkompressible Fluide

- Lineare Druckänderung mit der Höhe (Wasser)

Kompressible Fluide

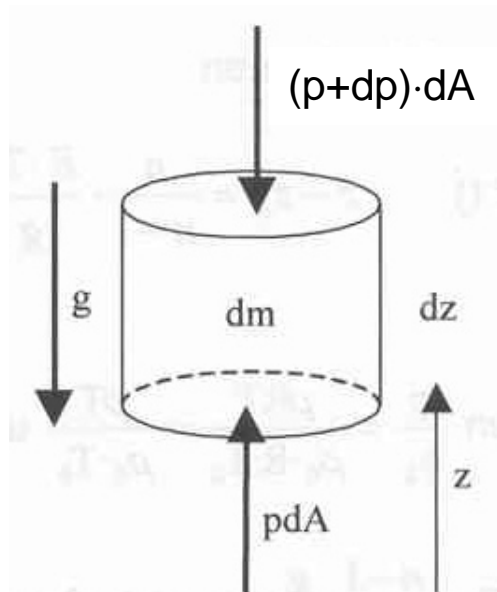
- Exponentielle Druckänderung mit der Höhe (Gase)

Luftdruck

- Kraft F , die eine Fläche durch die darüber befindliche Luftsäule der Höhe h erfährt

$$p = \frac{F}{A} = \frac{m \cdot g}{A} = \frac{\rho \cdot V \cdot g}{A} = \frac{\rho \cdot A \cdot h \cdot g}{A} = \rho \cdot g \cdot h$$

3.2.2 Kräftegleichgewicht an einem Volumenelement



Kräftegleichgewicht in z -Richtung mit der Masse dm

\Rightarrow *hydrostatische Grundgleichung*

$$\boxed{dp = -\rho \cdot g \cdot dz}$$

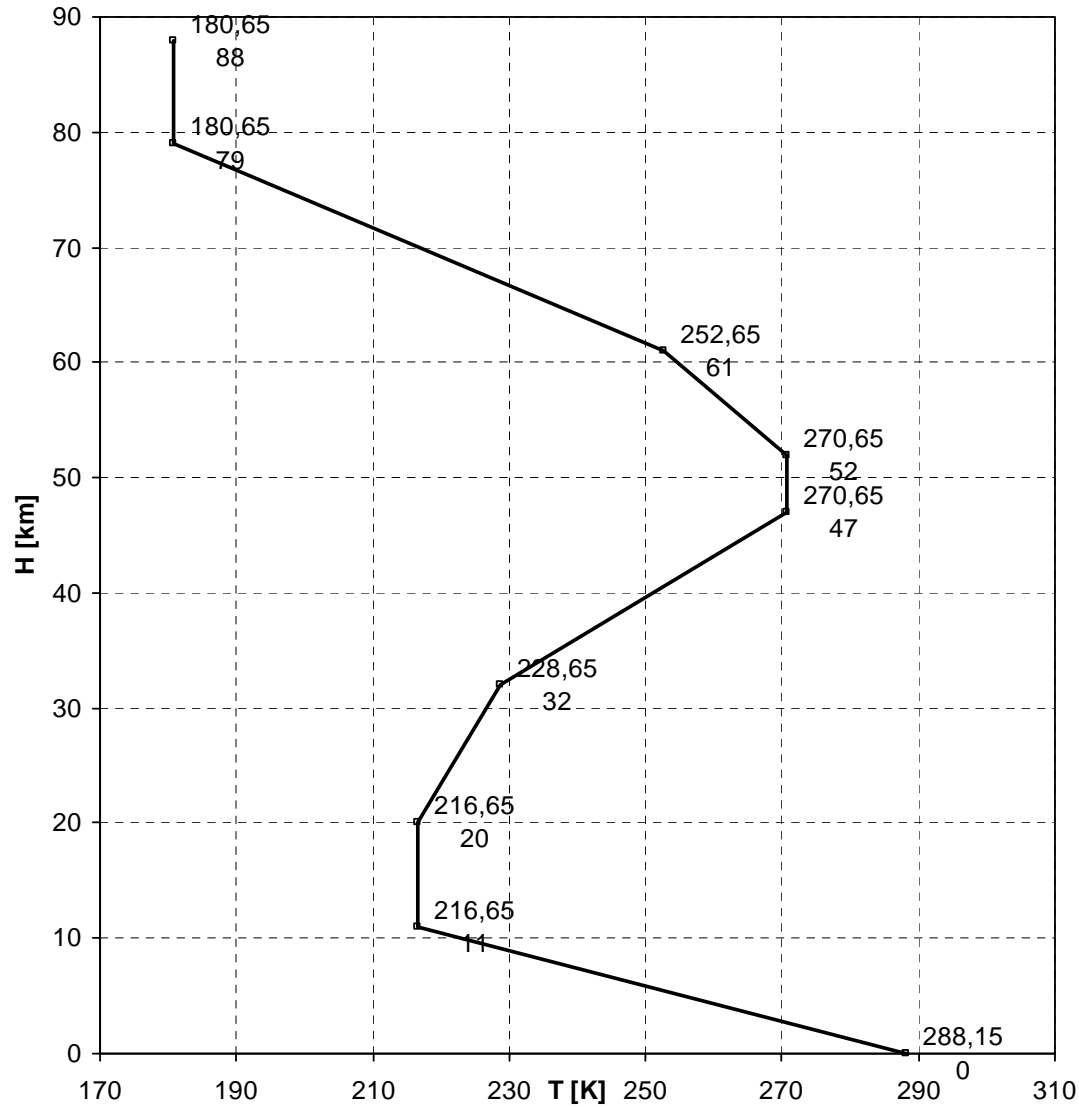
gilt für kompressible als auch für inkompressible Fluide

3.3 Internationale Standardatmosphäre (ISA)

- Normatmosphäre DIN 5450 bzw. seit 1975 DIN ISO 2535
- Basiert auf jahreszeitlich und geographisch gemittelten Meßwerten für Druck, Dichte und Temperatur
- Normierungssystem zur Auslegung und zum Vergleich von Flugleistungen

3.3.1 Temperaturverteilung der Standardatmosphäre

Berücksichtigung der unterschiedlichen Temperaturgradienten für unterschiedliche Höhenbereiche



Isotherme Schichtung:

$$T_h = T_A = const.$$

$$p_h = p_A \cdot e^{-\left(\frac{g_0}{R \cdot T_h}\right) \cdot (h-h_A)}$$

$$\rho_h = \rho_A \cdot e^{-\left(\frac{g_0}{R \cdot T_h}\right) \cdot (h-h_A)}$$

Bereiche mit linear veränderlicher Temperatur:

$$T_h = T_A + a \cdot (h - h_A)$$

$$p_h = p_A \cdot \left(\frac{T_h}{T_A}\right)^{\frac{-g_0}{a \cdot R}}$$

$$\rho_h = \rho_A \cdot \left(\frac{T_h}{T_A}\right)^{\left[\frac{g_0}{a \cdot R} + 1\right]}$$

Temperaturverteilung in der Standardatmosphäre (ISA)

Temperaturgradienten a und Anfangswerten (ρ_A) nach ISA zur abschnittswisen Berechnung von Druck, Dichte und Temperatur

Höhenintervall	h [m]	h_A [m]	T_A [K]	a [K/m]	p_A [Pa]	ρ_A [kg/m ³]
1	$-5 \cdot 10^3 - 11 \cdot 10^3$	0	288.15	$-6.5 \cdot 10^{-3}$	101325	1.2250
2	$11 \cdot 10^3 - 20 \cdot 10^3$	$11 \cdot 10^3$	216.65	0.0	22632	0.3639
3	$20 \cdot 10^3 - 32 \cdot 10^3$	$20 \cdot 10^3$	216.65	$+1.0 \cdot 10^{-3}$	5475	0.0880
4	$32 \cdot 10^3 - 47 \cdot 10^3$	$32 \cdot 10^3$	228.65	$+2.8 \cdot 10^{-3}$	868	0.0132
5	$47 \cdot 10^3 - 52 \cdot 10^3$	$47 \cdot 10^3$	270.65	0.0	111	0.0014
6	$52 \cdot 10^3 - 61 \cdot 10^3$	$52 \cdot 10^3$	270.65	$-2.0 \cdot 10^{-3}$	59	0.0008
7	$61 \cdot 10^3 - 79 \cdot 10^3$	$61 \cdot 10^3$	252.65	$-4.0 \cdot 10^{-3}$	18	0.0002
8	$79 \cdot 10^3 - 88 \cdot 10^3$	$79 \cdot 10^3$	180.65	0.0	1	$1.9 \cdot 10^{-5}$

Anfangswerte und Temperaturgradienten nach ISA

Werte der Standard-Atmosphäre (ISA) für $h = 0$ (MSL)

Höhe h [m]	Temperatur T [K]	Temperaturgradient a [K/m]	Druck p [Pa]	Dichte ρ [kg/m ³]	Schallgeschwindigkeit c [m/s]
0	288.15	$-6.5 \cdot 10^{-3}$	101325	1.2250	340

Weitere sinnvolle Parameter für ein ISA-Atmosphärenmodell

Schallgeschwindigkeit

- Temperatur- und somit höhenabhängige Schallgeschwindigkeit a für ideale Gase

$$a = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T}$$

$$R = c_p - c_v = \text{spezifische Gaskonstante} \quad (R_{Luft} = 287,05 \text{ [J/kg}\cdot\text{K]})$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \text{Isentropenexponent} \quad (\kappa_{Luft} = 1,4)$$

Machzahl

- Verhältnis von Strömungs- bzw. Fluggeschwindigkeit zu Schallgeschwindigkeit

$$M = \frac{\text{Strömungsgeschwindigkeit}}{\text{Schallgeschwindigkeit}} = \frac{c_\infty}{a}$$

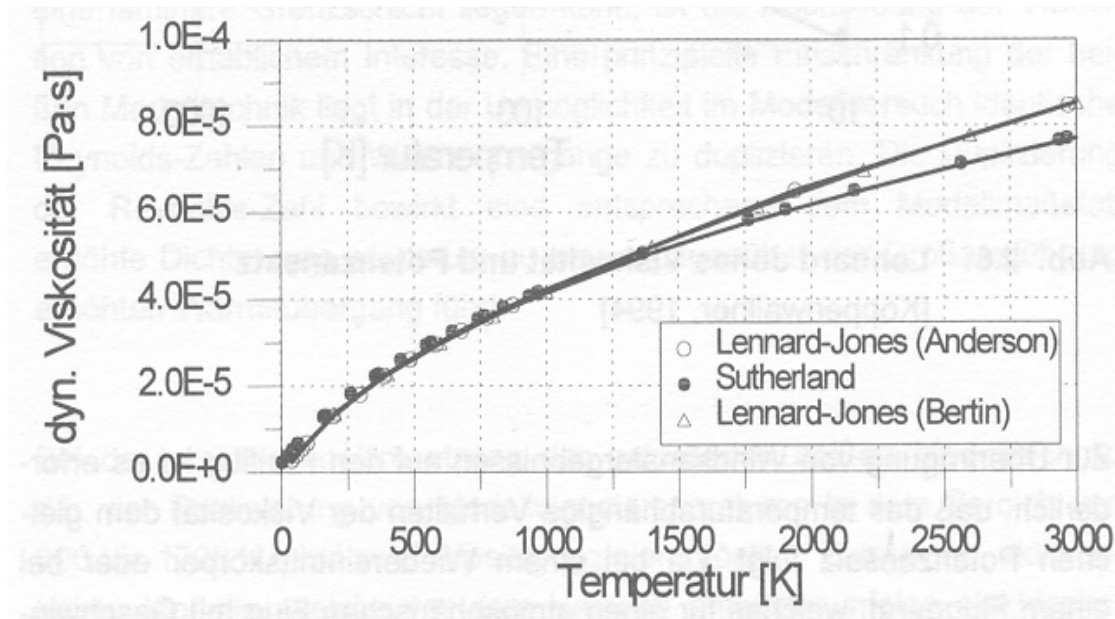
Wärmeleitfähigkeit

$$\lambda = 2,648151 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{T^{1,5}}{T + 245,4 \cdot 10^{-6}} \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$$

Weitere sinnvolle Parameter für ein ISA-Atmosphärenmodell

Viskosität

- Näherungsweise Berechnung der dynamischen Viskosität von Luft nach *Sutherland* als Funktion der Temperatur



dynamische Viskosität μ

$$\mu = 1.458 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{T^{1.5}}{T + 110.4} \quad [Pa \cdot s]$$

kinematische Viskosität ν

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{m^2}{s} \right]$$

Reynoldszahl

$$Re = \frac{c \cdot l_{ref}}{\nu} = \frac{c \cdot l_{ref} \cdot \rho}{\mu}$$

3.3.2 Definitionen der Höhe

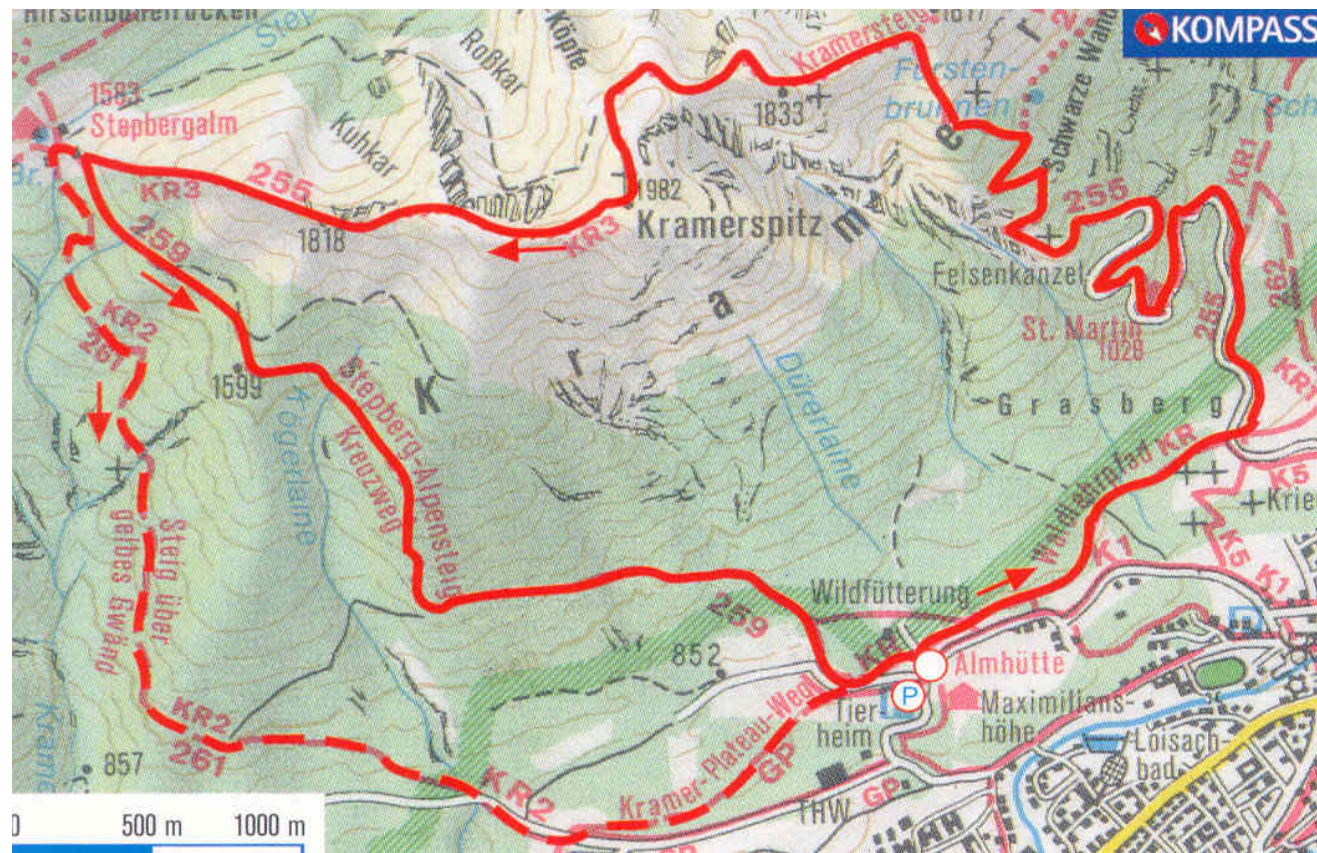
Umgangssprachliche Bezeichnung Höhe, also der Abstand eines Punktes zum Boden, erfordert im Sinne der Fluidmechanik eine genauere Beschreibung

Möglich sind mehrere Definitionen

- geometrische Höhe
- absolute Höhe
- geopotentielle Höhe
- Druckhöhe
- Temperaturhöhe
- Dichtehöhe

Geometrische Höhe h_G

- Abstand eines Punktes über dem Meeresspiegel, z.B. Höhenangaben in Landkarten



Absolute Höhe h_a

- Abstand eines Punktes zum Erdmittelpunkt
- r = Erdradius (Mittlerer Äquatorradius $r_E = 6378$ [km])

Geopotentielle Höhe h

- Quadratische Änderung der Gravitation mit dem Abstand zum Erdmittelpunkt
- Berücksichtigung der höhenabhängigen Erdgravitation ergibt die geopotentielle Höhe h

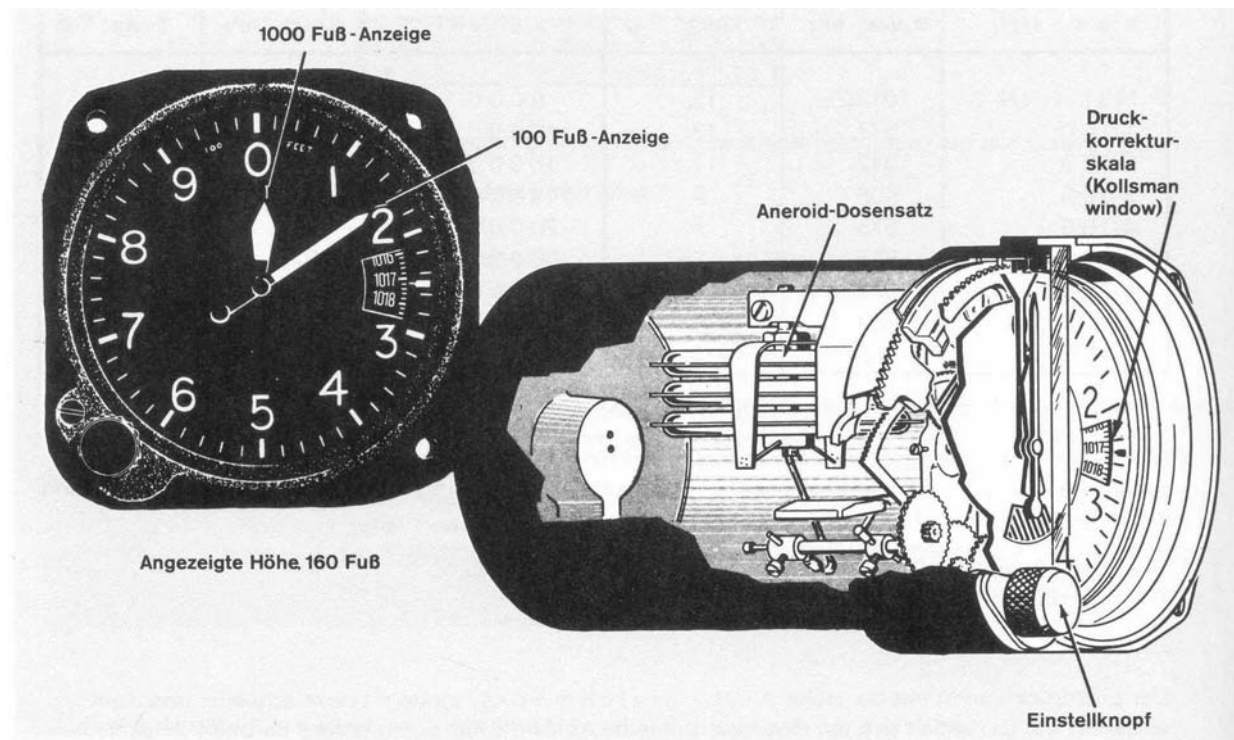
$$g(r) \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow m_K \cdot g_E = \frac{\gamma \cdot m_K \cdot m_E}{r_E^2}$$

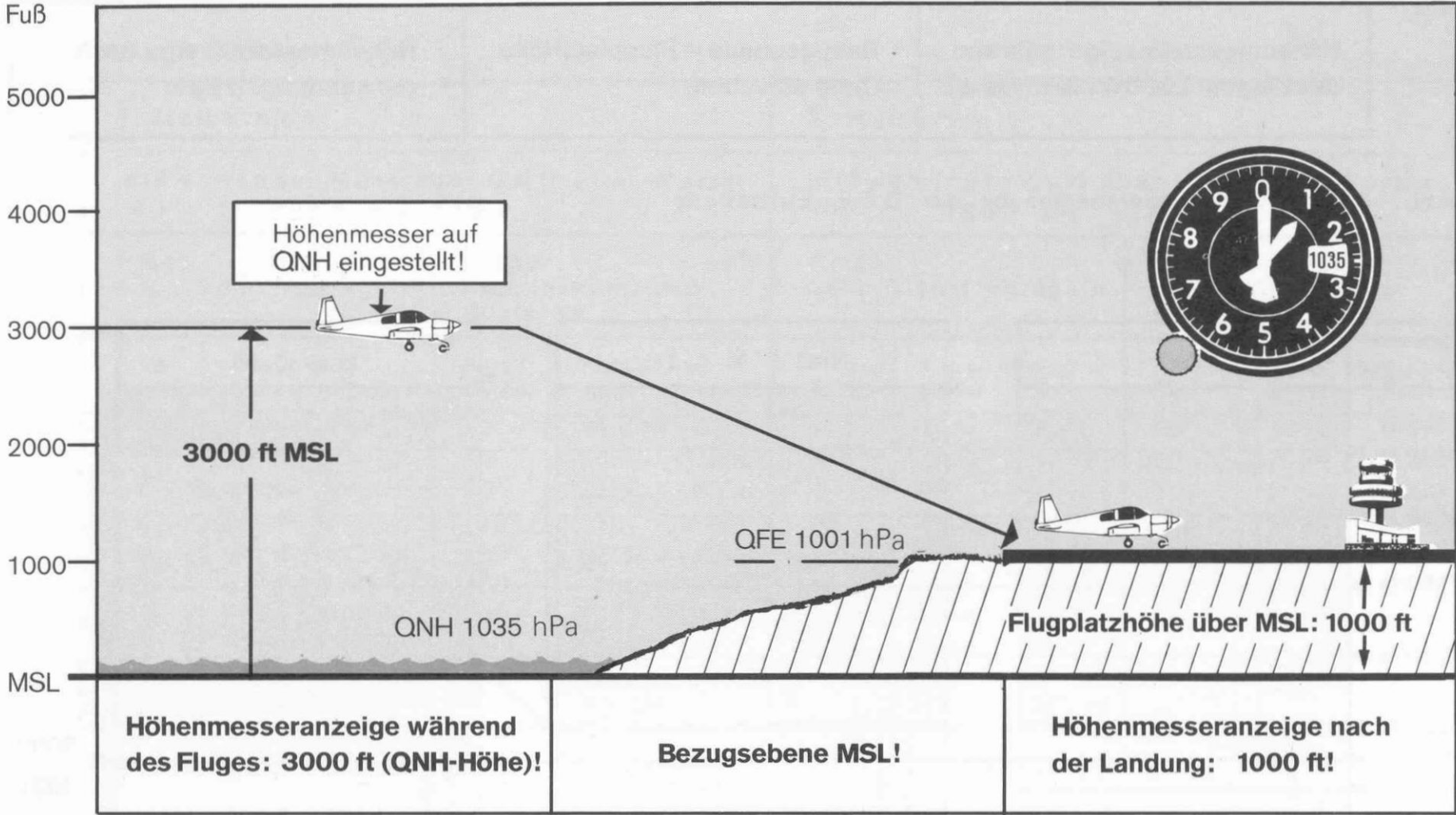
$$m_K \cdot g(r) = \frac{\gamma \cdot m_K \cdot m_E}{r^2} \Rightarrow \frac{g_E}{g(r)} = \frac{r^2}{r_E^2} \Rightarrow g(r) = g_E \cdot \frac{r_E^2}{r^2} = \frac{\gamma \cdot m_E}{r^2} \left[m/s^2 \right]$$

$$\Rightarrow h_g = \left(\frac{r_E}{r_E + h} \right) \cdot h$$

Druckhöhe

- Zuordnung einer Höhe h zu einem Luftdruck $p(h)$
- Einfache Höhenmesser in Flugzeugen arbeiten in der Regel als barometrische Höhenmesser
- Messung des statischen Luftdruck außerhalb des Flugzeugs \Rightarrow Flughöhe





Umrechnung QFE auf QNH

Umrechnung des aktuellen Luftdrucks (QFE) auf der Flugplatzhöhe h auf den Luftdruck bezogen auf Meeresniveau (QNH)

$$QNH = (QFE^a + b \cdot h)^{\frac{1}{a}} \text{ [hPa]}$$

mit

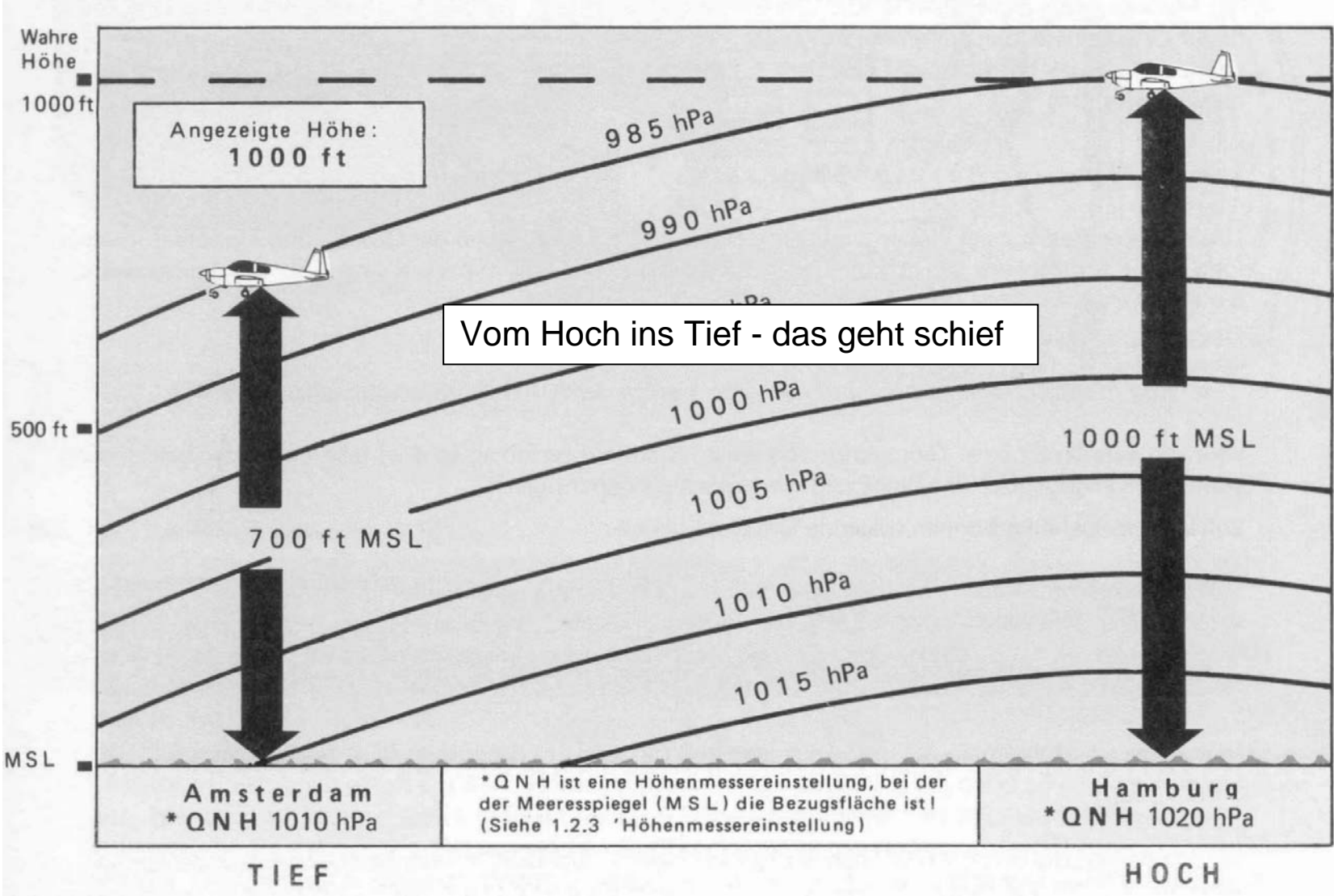
$$a = R \cdot \frac{-\gamma}{g} = 287,05 \cdot \frac{0,0065}{9,80665} = 0,1902612$$

$$b = -\gamma \cdot \frac{(p_{ISA, h=0})^a}{T_{ISA, h=0}} = 0,0065 \cdot \frac{(1013,25)^a}{288,15} = 8,417168 \cdot 10^{-5}$$

QNH	[hPa]	statischer Luftdruck bezogen auf Meeresniveau
QFE	[hPa]	statischer Luftdruck auf Flugplatzhöhe
h	[m]	Flugplatzhöhe
R	[J/kg·]	spezifische Gaskonstante von Luft bei einer relativen Feuchte von $\varphi = 0$
γ	[K/m]	Temperaturgradient in der Troposphäre nach ISA
g	[m/s ²]	Erdbeschleunigung auf der Höhe $h = 0$
$p_{ISA, h=0}$	[hPa]	Luftdruck entsprechend ISA auf der der Höhe $h = 0$
$T_{ISA, h=0}$	[K]	Temperatur entsprechend ISA auf der der Höhe $h = 0$

Druckhöhe

- Entspricht in der Regel nicht der geometrischen Höhe
- Staffelung des Flugverkehrs nach so genannten Flugflächen (*FL = flight levels*)
- Alle Höhenangaben werden bei diesem Verfahren auf den Standarddruck auf Meeresniveau (QNH) von $p_0 = 1013.25$ [hPa] bezogen
- Umrechnung: Höhe = Flugfläche x 100 [ft]
- Beispiel: FL120 entspricht einer Höhe von $120 \times 100 = 12000 \text{ft} = 3658$ [m],
sofern der reale Luftdruck auf Meeresniveau bezogen $p_0 = 1013.25$ [hPa] beträgt
- Flugzeuge bewegen sich dadurch auf Flächen konstanten Drucks (Isobarenflächen),
nicht auf einer konstanten geometrischen Höhe
- Vorteil: Gleich bleibende relative Höhenstaffelung zueinander



Temperaturhöhe

- Zuordnung einer Höhe zu der gemessenen statischen Lufttemperatur
- Bei Vorliegen der Standardatmosphäre ließe sich bis zu einer Höhe von 11 km eine Höhe zuordnen
- Keine relevante praktische Anwendung

Dichtehöhe

- Die Dichtehöhe ergibt sich über die Zustandsgleichung des idealen Gases aus den gemessenen Werten für Druck und Temperatur
- Die *Dichthöhe* wird insbesondere zur Berechnung der Flugleistungen, insbesondere der Startstrecke verwendet
- Näherungsformel zur Berechnung der Dichtehöhe

$$h_{Dichte} = h + (1013.25 - QNH) \cdot 30 + 120 \cdot (T_h - T_{h,ISA}) \text{ [ft]}$$

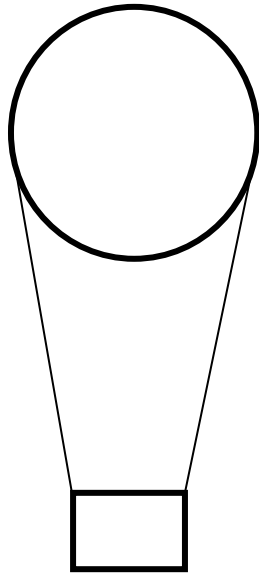
mit

h [ft] = Platzhöhe (1 ft = 0.3048 m)

QNH [hPa] = Luftdruck bezogen auf MSL

T_h = aktuelle Temperatur am Platz

$T_{h,ISA}$ = Temperatur am Platz bei ISA-Bedingungen

Bsp.: Gasballon mit Heliumfüllung**geg.:**

$$D_{Ballon} = 6 \text{ m auf MSL}$$

$$R_{He} = 2078 \text{ J/kgK}$$

$$m_{Hülle} = 20 \text{ kg}$$

$$m_{Korb} = 10 \text{ kg}$$

Die Hülle des Ballons ist vollständig flexibel

1. Berechnen Sie die Nutzlast, die der Ballon bei einem Start auf der Höhe $h = 0$ unter ISA-Bedingungen heben kann
2. Welchen Durchmesser hat der Ballon in einer Höhe $h = 12 \text{ km}$ unter ISA-Bedingungen

Bsp.: Auslegung einer Druckzelle

Die Druckkabine eines Flugzeugs soll für einen konstanten Kabineninnendruck ausgelegt werden, der einer Höhe von $h = 2400$ m entspricht.

Die maximale Flughöhe beträgt FL400.

Welcher Differenzdruck Δp lastet auf der Kabine

- a) Bei ISA-Bedingungen?
- b) Bei einem Luftdruck auf MSL von $p_0 = 1000$ hPa und einer Temperatur auf MSL von $T_0 = 35^\circ\text{C}$?