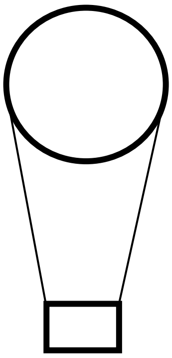
Kapitel 3 – Musterlösungen

Üb. 3-1: Gasballon mit Heliumfüllung



geg.:

D_{Ballon} = 6 m (auf der Höhe h = 0)

R_{He} = 2078 J/kgK

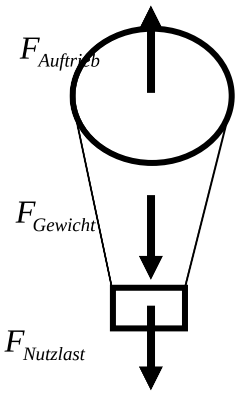
$m_{Hülle}$ = 20 kg

m_{Korb} = 10 kg

Die Hülle des Ballons ist vollständig flexibel

1. Berechnen Sie die Nutzlast, die der Ballon bei einem Start auf der Höhe h = 0 unter ISA-Bedingungen heben kann

2. Welchen Durchmesser hat der Ballon in einer Höhe h = 12 km unter ISA-Bedingungen



1. Berechnen Sie die Nutzlast, die der Ballon bei einem Start auf der Höhe h = 0 unter ISA-Bedingungen heben kann

ISA-Bedingungen bei h = 0:

$$p_\infty = 101325 Pa$$

$$\rho_\infty = 1{,}225 kg/m^3$$

$$T_\infty = 288{,}15 K$$

Kräftegleichgewicht in z-Richtung

$$F_{Nutzlast} = F_{Auftrieb} - F_{Gewicht}$$

$$F_{Nutzlast} = g \cdot \left(\underbrace{\rho_{Luft} \cdot V_B}_{Auftrieb} - \underbrace{\rho_{He} \cdot V_B - m_{Hülle} - m_{Korb}}_{Gewicht} \right)$$

Berechnung der Dichte von Helium mittels der Zustandsgleichung des idealen Gases

$$\rho_{He} = \frac{p_\infty}{R_{He} \cdot T_\infty} = \frac{101325\,Pa}{2078\,J/kg \cdot K \cdot 288{,}15\,K} = 0{,}1692\,kg/m^3$$

$$F_{Nutzlast} = g \cdot \left[V_B \cdot \left(\rho_{Luft} - \rho_{He} \right) - m_{Hülle} - m_{Korb} \right]$$

$$F_{Nutzlast} = 9{,}81\,m/s^2 \cdot \left[\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 6^3\,m^3 \cdot \left(1{,}225\,kg/m^3 - 0{,}1692\,kg/m^3 \right) - 20\,kg - 10\,kg \right]$$

$$F_{Nutzlast} = 877{,}1\,N$$

Einatomige Gase (He, Ar, Ne,..) erfüllen immer die Annahme eines idealen Gases

2. Welchen Durchmesser hat der Ballon in einer Höhe h = 12 km unter ISA-Bedingungen

Isotherme Schichtung für den Bereich 11 < h < 20 km, Anfangswerte entsprechend Tabelle:

h [m]	h_A [m]	T_A [K]	a [K/m]	p_A [Pa]	ρ_A [kg/m³]
$-5 \cdot 10^3$ - $11 \cdot 10^3$	0	288,15	$-6{,}5 \cdot 10^{-3}$	101325	1,2250
$11 \cdot 10^3$ - $20 \cdot 10^3$	$11 \cdot 10^3$	216,65	0,0	22632	0,3639

$$T_h = T_A = const. = 216{,}65\,K$$

$$p_h = p_A \cdot e^{-\left(\frac{g_0}{R \cdot T_h}\right) \cdot (h - h_A)} = 22632 \cdot e^{-\left(\frac{9{,}81}{287 \cdot 216{,}65}\right) \cdot (12000 - 11000)} = 19329\,Pa$$

$$\rho_h = \rho_A \cdot e^{-\left(\frac{g_0}{R \cdot T_h}\right) \cdot (h - h_A)} = 0{,}3639 \cdot e^{-\left(\frac{9{,}81}{287 \cdot 216{,}65}\right) \cdot (12000 - 11000)} = 0{,}3108\,kg/m^3$$

oder $$\rho_h = \frac{p_h}{R \cdot T_h} = \frac{19329}{287 \cdot 216{,}65} = 0{,}3108\,kg/m^3$$

Die Hülle des Ballons ist vollständig flexibel $\Rightarrow$ $\quad p_B = p_h$

$$\rho_{He} = \frac{p_h}{R \cdot T_h} = \frac{19329\,Pa}{2078\,J/kgK \cdot 216{,}65\,K} = 0{,}0429\,kg/m^3$$

$$m_{He} = \rho_{He} \cdot V_B = \rho_{He} \cdot \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot D^3 = 0{,}1692\,kg/m^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 6^3\,m^3 = 19{,}136\,kg$$

$$V_B = \frac{m_{He}}{\rho_{He}} = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot D^3$$

$$D_{h=12\,km} = \left(\frac{6}{\pi} \cdot \frac{m_{He}}{\rho_{He}} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{6}{\pi} \cdot \frac{19{,}136\,kg}{0{,}0429\,kg/m^3} \right)^{\frac{1}{3}} = 9{,}48\,m$$

Üb. 3-2: Auslegung einer Druckzelle

Die Druckkabine eines Flugzeugs soll für einen konstanten Kabineninnendruck ausgelegt werden, der einer Höhe von h = 2400 m entspricht. Die maximale Flughöhe beträgt FL400.

Welcher Differenzdruck Δp lastet auf der Kabine

a) Bei ISA-Bedingungen?

b) Bei einem Luftdruck auf MSL von p_0 = 1000 hPa und einer Temperatur auf MSL von T_0 = 35°C?

Kabineninnendruck p_i

$$T_h = T_A + a \cdot (h - h_A) = 288{,}15 - 6{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot (2400 - 0) \quad \Rightarrow \quad T_{h=2400} = 272{,}55\,K$$

$$p_h = p_A \cdot \left(\frac{T_h}{T_A}\right)^{\frac{-g_0}{a \cdot R}} = 101325 \cdot \left(\frac{272{,}55}{288{,}15}\right)^{\frac{-9{,}81}{-0{,}0065 \cdot 287}} \quad \Rightarrow \quad p_{h=2400} = 75614\,Pa$$

a) Außendruck p_a bei ISA-Bedingungen auf Reiseflughöhe

$$H = FL400 \cdot 100 = 40000\,ft\,,\ H = 40000 \cdot 0{,}3048\,m \quad \Rightarrow \quad H = 12192\,m$$

Höhe liegt im Intervall 11 km < H < 20 km

$\Rightarrow$ konstante Temperaturschichtung mit $T = T_A = 216{,}65\,K$

$\Rightarrow$ $p_A = 22632\,Pa\,,\ h_A = 11000\,m$

$$p_h = p_A \cdot e^{-\left(\frac{g_0}{R \cdot T_h}\right) \cdot (h - h_A)} = 22632 \cdot e^{-\left(\frac{9{,}81}{287 \cdot 216{,}65}\right) \cdot (12192 - 11000)}$$

$$\Rightarrow \quad p_{FL400,ISA} = 18752\,Pa$$

Druckdifferenz bei ISA-Bedingungen

$$\Delta p = p_i - p_{FL400,ISA} = 75614 - 18752 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta p_{FL400,ISA} = 56862\,Pa}$$

b) Außendruck p_a bei ISA-13,25 hPa - und ISA +20°C - Bedingungen

Aufgrund des linearen Temperaturverhaltens kann die Temperatur an allen Punkten um die Temperaturdifferenz $\Delta T = 20°$ verschoben werden.

Berechnung des Drucks in $H = 11000\,m$

$$p_{h=11km} = p_A \cdot \left(\frac{T_h}{T_A}\right)^{\frac{-g_0}{a \cdot R}} = 10^5 \cdot \left(\frac{216{,}65 + 20}{288{,}15 + 20}\right)^{\frac{-9{,}81}{-0{,}0065 \cdot 287}} \quad \Rightarrow \quad p_{h=11km} = 24949\,Pa$$

Berechnung des Drucks in $H = 12192\,m$

$$p_{h=12192} = p_{h=11km} \cdot e^{-\left(\frac{g_0}{R \cdot (T_h + 20)}\right) \cdot (h - h_A)} = 24949 \cdot e^{-\left(\frac{9{,}81}{287 \cdot (216{,}65 + 20)}\right) \cdot (12192 - 11000)}$$

$$\Rightarrow \quad p_{h=12192} = 21003\,Pa$$

Druckdifferenz bei ISA-13.25 hPa - und ISA+20°C - Bedingungen

$$\Delta p = p_i - p_{FL400} = 75614 - 21003 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta p_{FL400} = 54611\,Pa}$$