Übung 3-1

Sie betrachten einen kugelförmigen Gasballon, der mit Helium gefüllt ist. Für den Ballon, dessen Hülle vollständig flexibel ist, also keine Druckkräfte aufnehmen kann, gelten folgende Daten:

D_{Ballon} = 6 m

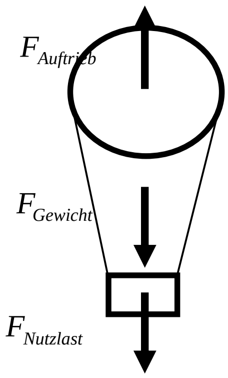
R_{He} = 2078 J/kgK

$m_{\text{Hülle}}$ = 20 kg

m_{Korb} = 10 kg

1. Berechnen Sie die Nutzlast, die der Ballon bei einem Start auf der Höhe $h = 0$ unter ISA-Bedingungen heben kann

2. Welchen Durchmesser hat der Ballon in einer Höhe h = 12 km unter ISA-Bedingungen?



1. Nutzlast, die der Ballon bei einem Start auf der Höhe $h = 0$ unter ISA-Bedingungen heben kann:

ISA-Bedingungen bei $h = 0$:

$$p_\infty = 101325\,\text{Pa}$$

$$\rho_\infty = 1{,}225\,\text{kg}/\text{m}^3$$

$$T_\infty = 288{,}15\,\text{K}$$

Kräftegleichgewicht in z-Richtung

$$F_{\text{Nutzlast}} = F_{\text{Auftrieb}} - F_{\text{Gewicht}}$$

$$F_{\text{Nutzlast}} = g \cdot \left(\underbrace{\rho_{\text{Luft}} \cdot V_{\text{B}}}_{\text{Auftrieb}} - \underbrace{\rho_{\text{He}} \cdot V_{\text{B}} - m_{\text{Hülle}} - m_{\text{Korb}}}_{\text{Gewicht}} \right)$$

Berechnung der Dichte von Helium mittels der Zustandsgleichung des idealen Gases

$$\rho_{\text{He}} = \frac{p_\infty}{R_{\text{He}} \cdot T_\infty} = \frac{101325\,\text{Pa}}{2078\,\text{J/kg} \cdot \text{K} \cdot 288{,}15\,\text{K}} = 0{,}1692\,\text{kg}/\text{m}^3$$

$$F_{\text{Nutzlast}} = g \cdot \left[V_{\text{B}} \cdot \left(\rho_{\text{Luft}} - \rho_{\text{He}} \right) - m_{\text{Hülle}} - m_{\text{Korb}} \right]$$

$$F_{\text{Nutzlast}} = 9{,}81\,\text{m}/\text{s}^2 \cdot \left[\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 6^3\,\text{m}^3 \cdot \left(1{,}225\,\text{kg}/\text{m}^3 - 0{,}1692\,\text{kg}/\text{m}^3 \right) - 20\,\text{kg} - 10\,\text{kg} \right]$$

$$F_{\text{Nutzlast}} = 877{,}1\,\text{N}$$

Einatomige Gase (He, Ar, Ne,..) erfüllen übrigens immer die Annahme eines idealen Gases

2. Durchmesser des Ballons in einer Höhe von h = 12 km

Isotherme Schichtung für den Bereich 11 < h < 20 km, Anfangswerte entsprechend Tabelle:

h [m]	h_A [m]	T_A [K]	a [K/m]	p_A [Pa]	ρ_A [kg/m³]
$-5\cdot10^3$ - $11\cdot10^3$	0	288,15	-6,5·10-3	101325	1,2250
$11\cdot10^3$ - $20\cdot10^3$	$11\cdot10^3$	216,65	0,0	22632	0,3639

$$T_{\text{h}} = T_{\text{A}} = \text{const.} = 216{,}65\,\text{K}$$

$$p_{\text{h}} = p_{\text{A}} \cdot \text{e}^{-\left(\frac{g_0}{\text{R}\cdot T_{\text{h}}}\right)\cdot(h-h_{\text{A}})} = 22632 \cdot \text{e}^{-\left(\frac{9{,}81}{287\cdot216{,}65}\right)\cdot(12000-11000)} = 19329\,\text{Pa}$$

$$\rho_{\text{h}} = \rho_{\text{A}} \cdot \text{e}^{-\left(\frac{g_0}{\text{R}\cdot T_{\text{h}}}\right)\cdot(h-h_{\text{A}})} = 0{,}3639 \cdot \text{e}^{-\left(\frac{9{,}81}{287\cdot216{,}65}\right)\cdot(12000-11000)} = 0{,}3108\,\text{kg}/\text{m}^3$$

oder

$$\rho_{\text{h}} = \frac{p_{\text{h}}}{\text{R} \cdot T_{\text{h}}} = \frac{19329}{287 \cdot 216{,}65} = 0{,}3108\,\text{kg}/\text{m}^3$$

Die Hülle des Ballons ist vollständig flexibel, kann also keine Druckkräfte aufnehmen:

$$p_B = p_h$$

$$\rho_{He} = \frac{p_h}{R \cdot T_h} = \frac{19329\,\text{Pa}}{2078\,\text{J/kgK} \cdot 216{,}65\,\text{K}} = 0{,}0429\,\text{kg/m}^3$$

$$m_{He} = \rho_{He} \cdot V_B = \rho_{He} \cdot \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot D^3 = 0{,}1692\,\text{kg/m}^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 6^3\,\text{m}^3 = 19{,}136\,\text{kg}$$

$$V_B = \frac{m_{He}}{\rho_{He}} = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot D^3$$

$$D_{h=12\,\text{km}} = \left(\frac{6}{\pi} \cdot \frac{m_{He}}{\rho_{He}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{6}{\pi} \cdot \frac{19{,}136\,\text{kg}}{0{,}0429\,\text{kg/m}^3}\right)^{\frac{1}{3}} = 9{,}48\,\text{m}$$

Übung 3-2

Vom 16. August 1960 bis zum 14. Oktober 2012 hielt der US-Amerikaner Joseph Kittinger den Weltrekord für einen Fallschirmabsprung aus der größten Höhe, in diesem Fall 31333m. Kittingers Sprünge aus einer offenen Ballongondel dienten der Erforschung und Entwicklung von Rettungssystemen für Piloten bei Absprüngen aus großen Höhen. Etwas profaner waren die Gründe für die Einstellung der Rekorde von Joseph Kittinger, darunter die größte im freien Fall erreichte Geschwindigkeit und der höchste Absprung, durch einen Sprung des Österreichers Felix Baumgartner am 14. Oktober 2012 mit einem Sprung aus einer Druckkapsel aus 39045 m. Hierbei ging es lediglich um eine überteuerte Werbeaktion für eine etwas seltsam schmeckende Limonade. Fast unbemerkt von der Weltöffentlichkeit und ohne jeglichen Medienrummel wurde dieser Rekord jedoch kurz darauf, am 24. Oktober 2014, durch den US-Amerikaner Alan Eustace, durch einen Sprung aus 41419 m Höhe überboten.

Baumgartner erreichte nach relativ kurzer Zeit seine Maximalgeschwindigkeit von 1342 km/h. Die Frage, die es zu klären gilt lautet: Wie sehen die körperlichen Belastungen bei solchen Geschwindigkeiten in großer Höhe aus?

1. Berechnen Sie den Staudruck, dem diese Geschwindigkeit entspricht und vergleichen Sie diesen mit den Belastungen eines Motorradfahrers auf einer Autobahn auf Meereshöhe.

2. Hatte Baumgartner bei seinem Sprung die Schallmauer durchbrochen?

1. Belastung während des Sprungs:

benötigt werden die Daten für die Absprunghöhe von 39 km Höhe.

Sie befinden sich in dem Höhenintervall von 32 bis 47 km Höhe. Die entsprechenden Anfangswerte und den Temperaturgradient entnehmen Sie Tab 3-3

h [m]	h_A [m]	T_A [K]	p_A [Pa]	ρ_A [kg/m³]	γ [K/m]
$32 \cdot 10^3$ - $47 \cdot 10^3$	$32 \cdot 10^3$	228,65	868	0,0132	$+2{,}8 \cdot 10^{-3}$

Die Berechnung von Temperatur, Druck und Dichte in h = 39045 m erfolgt mittels der Gleichungen für Höhenintervalle mit linear veränderlicher Temperatur.

$$T_\mathrm{h} = T_\mathrm{A} + \gamma \cdot (h - h_\mathrm{A}) = 228{,}65 + 2{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot (39045 - 32 \cdot 10^3) = 248{,}4\ \mathrm{K}$$

$$p_\mathrm{h} = p_\mathrm{A} \cdot \left(\frac{T_\mathrm{h}}{T_\mathrm{A}}\right)^{-\mathrm{g}_0/\gamma \cdot \mathrm{R}} = 868 \cdot \left(\frac{248{,}4}{228{,}65}\right)^{-9{,}81/2{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 287{,}05} = 316\ \mathrm{Pa}$$

$$\rho_\mathrm{h} = \rho_\mathrm{A} \cdot \left(\frac{T_\mathrm{h}}{T_\mathrm{A}}\right)^{-(\mathrm{g}_0/\gamma \cdot \mathrm{R}+1)} = 0{,}0132 \cdot \left(\frac{248{,}4}{228{,}65}\right)^{-9{,}81/2{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 287{,}05}$$

$$\rho_\mathrm{h} = 4{,}42 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg/m^3}$$

Fallstrecke H bis zum Erreichen von c_{max} = 1342 km/h:

Aufgrund der sehr geringen Luftdichte in diesem Höhenbereich kann die Reibung näherungsweise vernachlässigt werden. Im reibungsfreien Fall gilt

$$c = \sqrt{2 \cdot \mathrm{g} \cdot H}$$

also

$$H = \frac{{c_\mathrm{max}}^2}{2 \cdot \mathrm{g}} = \frac{\left(\frac{1342}{3{,}6}\right)^2}{2 \cdot 9{,}81} = 7083\ \mathrm{m}$$

Das bedeutet, dass Baumgartner seine maximale Geschwindigkeit in einer Höhe von h = 39045 -7083 = 31962 m erreichte. Welchem Staudruck entspricht das?

Die Anfangswerte für das Höhenintervall von 20 – 32 km Höhe erhalten Sie wieder aus Tab. 3-3.

h [m]	h_A [m]	T_A [K]	p_A [Pa]	ρ_A [kg/m³]	γ [K/m]
$20 \cdot 10^3$ - $32 \cdot 10^3$	$20 \cdot 10^3$	216,65	5475	0,0880	$+1{,}0 \cdot 10^{-3}$

Benötigt wird die Luftdichte in h = 31962 m. Die Berechnung erfolgt wieder mittels der Gleichungen für Höhenintervalle mit linear veränderlicher Temperatur.

$$T_\mathrm{h} = T_\mathrm{A} + \gamma \cdot (h - h_\mathrm{A}) = 216{,}65 + 1{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot (31962 - 20 \cdot 10^3) = 228{,}61\ \mathrm{K}$$

$$\rho_\mathrm{h} = \rho_\mathrm{A} \cdot \left(\frac{T_\mathrm{h}}{T_\mathrm{A}}\right)^{-(\mathrm{g}_0/\gamma \cdot \mathrm{R}+1)} = 0{,}088 \cdot \left(\frac{228{,}61}{216{,}65}\right)^{(-9{,}81/1{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot 287{,}05+1)}$$

$$\rho_\mathrm{h} = 0{,}0133\ \mathrm{kg/m^3}$$

Staudruck bei 1342 km/h in 31962 m Höhe:

$$\bar{q}_\infty = \frac{\rho_\mathrm{h}}{2} \cdot c_\mathrm{max}{}^2 = \frac{0{,}0133}{2} \cdot \left(\frac{1342}{3{,}6}\right)^2 = 924\ \mathrm{Pa}$$

Entsprechende Geschwindigkeit bei gleichem Staudruck auf Meeresniveau:

$$c_\mathrm{h=0} = \sqrt{\frac{\bar{q}_\infty \cdot 2}{\rho_\mathrm{h=0}}} = \sqrt{\frac{924 \cdot 2}{1{,}225}} = 38{,}8\ \mathrm{m/s} = 139{,}8\ \mathrm{km/h}$$

2. Wurde bei dem Sprung die Schallmauer durchbrochen?

Schallgeschwindigkeit in h = 31962 m

$$a_\mathrm{h} = \sqrt{\kappa \cdot \mathrm{R} \cdot T_\mathrm{h}} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287{,}05 \cdot 228{,}61} = 303{,}13\ \mathrm{m/s}$$

Die Maximalgeschwindigkeit betrug c_max = 1342 km/h = 372,77 m/s, also wurde eine Machzahl von

$$M = \frac{c_\mathrm{max}}{a_\mathrm{h}} = \frac{372{,}77}{303{,}13} = 1{,}23 > 1$$

erreicht. Baumgartner flog also sicher eine gewisse Zeit im Überschall bis in niedrigerer Höhe reibungsbedingt die Geschwindigkeit wieder abnahm und die Reise mit Unterschallgeschwindigkeit bis zur Landung fortgesetzt wurde.

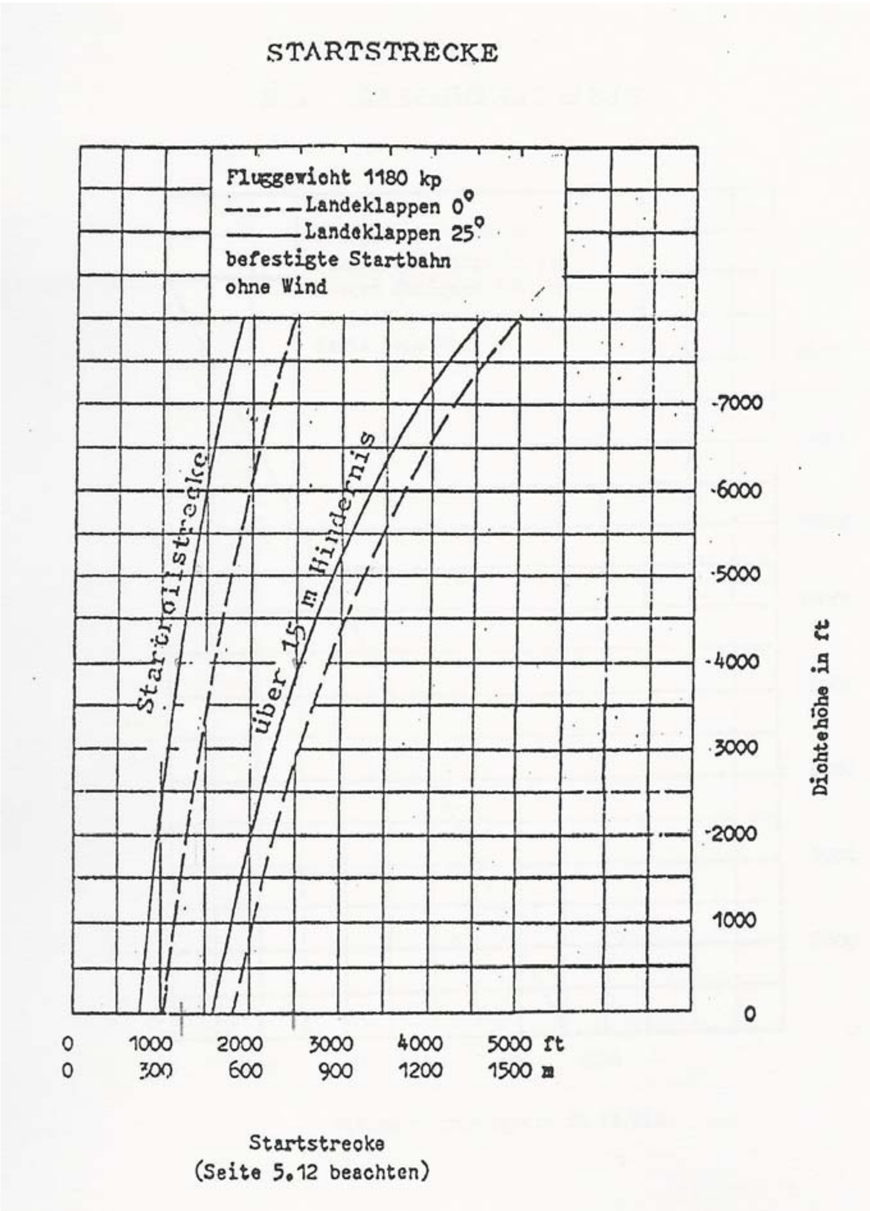
Übung 3-3

Sie planen einen Flug vom dem Flugplatz München-Oberschleißheim mit einem einmotorigen Sportflugzeug, einer Piper PA28-R200. Die Platzhöhe von München-Oberschleißheim beträgt h = 485 m, die Bahnlänge beträgt L = 808 m.

Berechnen Sie die erforderliche Startstrecke s_2[1] und s_2 für die beiden folgenden Tage:

- Tag 1: QNH = 1020 hPa, T = +2°C.
- Tag 2: QNH = 1020 hPa, T = +32°C

An welchem der beiden Tage sollten Sie von einem Start absehen?



Startstrecken für PA28-R200

[1] Startstecke s_1: Erforderliche Strecke bis zum Abheben,
Startstrecke s_2: Erforderliche Strecke bis zum Überfliegen eines (fiktiven) 15 m - Hindernisses

Berechnung der Dichtehöhen

- Tag 1: QNH = 1020 hPa, T = +2°C.
- Tag 2: QNH = 1020 hPa, T = +32°C

Temperatur nach ISA auf Platzhöhe:

$$T_{\mathrm{h,ISA}} = T_{\mathrm{A}} + \gamma \cdot (h_{\mathrm{A}} + h) = 288{,}15 - 0{,}0065 \cdot (0 + 485) = 11{,}85\ ^{\circ}\mathrm{C}$$

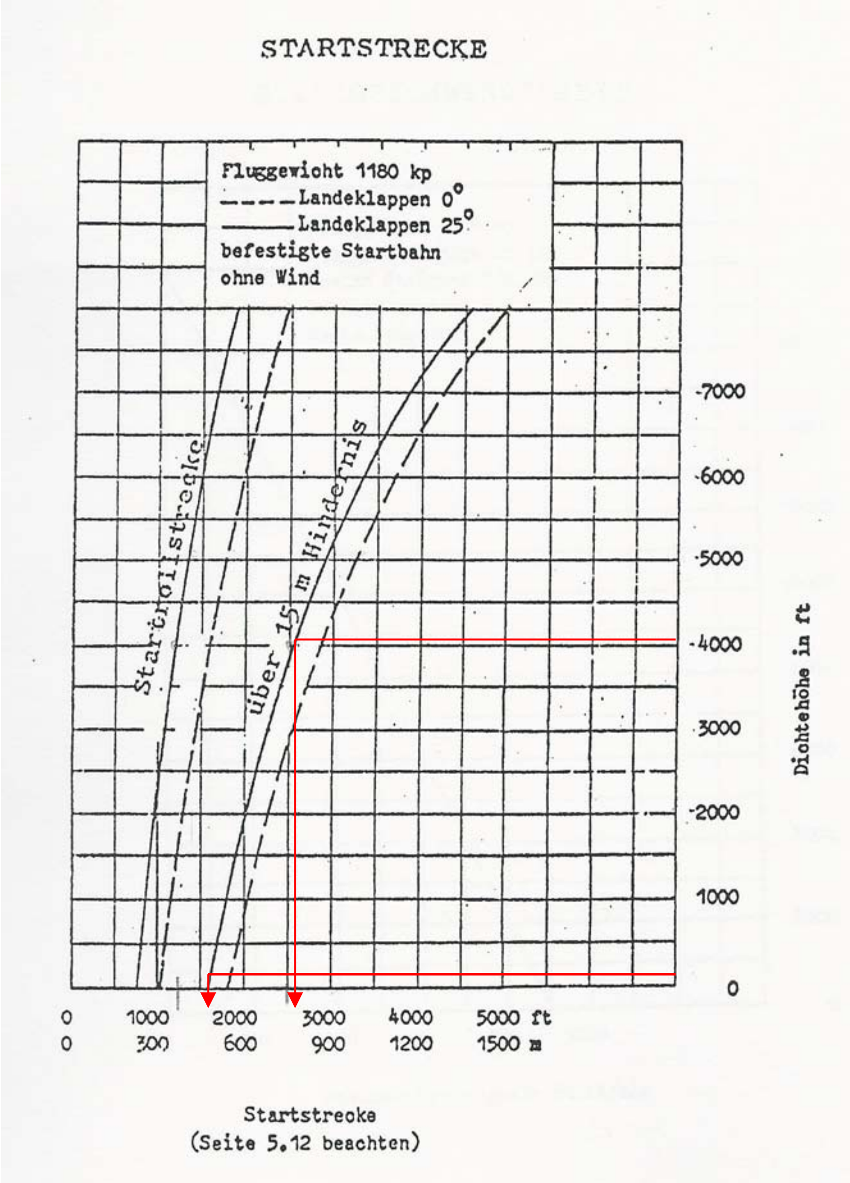
Tag 1:

$$h_{\mathrm{Dichte}} = h + (1013{,}25 - QNH) \cdot 10 + \left(T_{\mathrm{h}} - T_{\mathrm{h,ISA}}\right) \cdot 40$$

$$h_{\mathrm{Dichte}} = 485 + (1013{,}25 - 1020) \cdot 10 + (2 - 11{,}85) \cdot 40 = 23{,}5\ \mathrm{m} = 77\ \mathrm{ft}$$

Tag 2:

$$h_{\mathrm{Dichte}} = 485 + (1013{,}25 - 1020) \cdot 10 + (32 - 11{,}85) \cdot 40 = 1223{,}5\ \mathrm{m} = 4014\ \mathrm{ft}$$



Benötigt wird nicht die Startrollstrecke s_1, das heiß die Strecke, die bis zum Abheben erforderlich ist, sondern die Startstrecke s_2. Damit wird die Strecke bezeichnet, die bis zum Überfliegen eines fiktiven 15m-Hindernisses erforderlich ist. Dabei kann die Kurzstartvariante, das heißt eine Landeklappenstellung von 25°, gewählt werden. Aus dem Diagramm des Flughandbuchs der Piper PA28-R200 ergibt sich damit für Tag 1, mit einer Dichtehöhe von 77 ft eine Startstrecke von 480 m und für Tag 2, mit einer Dichtehöhe von 4014 ft eine Startstrecke von 780 m.

Da die Bahnlänge 808 m beträgt wäre ein Start an beiden Tagen möglich, allerdings sind die Reserven am Tag 2 nahezu gleich Null. Also ein kurzfristig auftretender Rückenwind hätte in diesem Fall bereits fatale Folgen.

Bei der Berechnung der Dichtehöhe ist auch zu berücksichtigen, dass bei der Temperatur am Platz nicht die Temperatur im Schatten, sondern die Temperatur, die wirklich über der Startbahn herrscht relevant ist. Diese kann bei schwarzen Asphaltbahnen deutlich über der Temperatur im Schatten liegen.