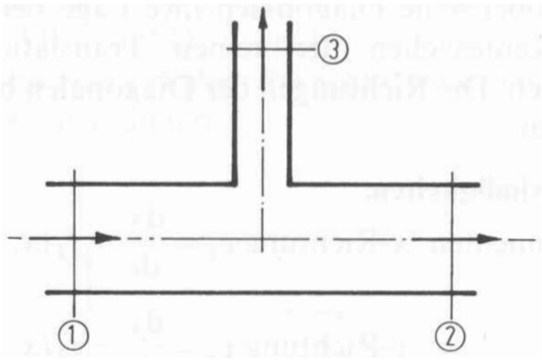
Kapitel 4 – Musterlösungen Teil 1

Üb. 4-1: Rohrverzweigung eines Abwasserrohrs



geg.:

D_1	$= D_2$	=	100 mm
$\dot{V}_1$		=	42,4 m³/h
$\dot{V}_2 : \dot{V}_3$		=	2:1
c_3		=	c_1

ges.:

D_3 Durchmesser Abzweigungsrohr
c_2 Geschwindigkeit im Querschnitt *2*

1. D_3 (Durchmesser Abzweigungsrohr)

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 + \dot{V}_3$$

mit $\dfrac{\dot{V}_2}{\dot{V}_3} = \dfrac{2}{1} \Rightarrow \quad \dot{V}_2 = 2 \cdot \dot{V}_3 \quad \Rightarrow \quad \dot{V}_3 = \dfrac{1}{3} \cdot \dot{V}_1$

$\Rightarrow \quad \dot{V}_3 = \dfrac{1}{3} \cdot \dot{V}_1 \quad \Rightarrow \quad c_3 \cdot A_3 = \dfrac{1}{3} \cdot c_1 \cdot A_1$

mit $c_3 = c_1 \Rightarrow \quad A_3 = \dfrac{1}{3} \cdot A_1$

$\Rightarrow \quad D_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot D_1 = \dfrac{100\,mm}{\sqrt{3}} = 57{,}7\,mm$

2. c_2 (Geschwindigkeit im Querschnitt 2)

$$\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_3} = \frac{2}{1}$$

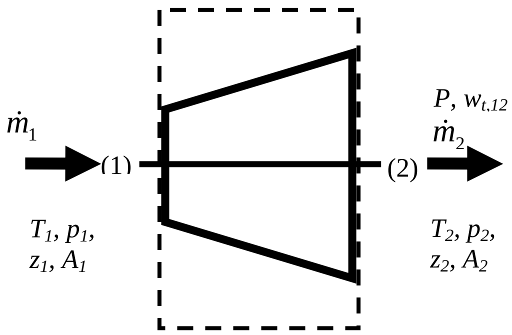
mit $\dot{V}_1 = \dot{V}_2 + \dot{V}_3 \Rightarrow \dot{V}_2 = \dfrac{2}{3} \cdot \dot{V}_1 \quad \Rightarrow \quad A_2 \cdot c_2 = \dfrac{2}{3} \cdot A_1 \cdot c_1$

mit $A_2 = A_1 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \dfrac{2}{3} \cdot c_1$

$$c_1 = \frac{\dot{V}_1}{A_1} = \frac{\dot{V}_1 \cdot 4}{D_1^2 \cdot \pi} = \frac{42{,}4\,m^3/h \cdot 4}{3600\,s \cdot 0{,}1^2\,m^2 \cdot \pi} = 1{,}5\,m/s$$

$$c_2 = \frac{2}{3} \cdot c_1 = \frac{2}{3} \cdot 1{,}5\,m/s = 1{,}0\,m/s$$

Üb. 4-2: Stationär durchströmte Gasturbine



Ein- und Austrittsebene der Turbine liegen auf gleiche Höhe

Isentrope Expansion von 14049 m³/h Heißgas von $p_1 = 18{,}9\,bar$ auf $p_2 = 1{,}02\,bar$

Turbineneintrittsquerschnitt $A_1 = 0{,}01942\,m^2$

Turbinenaustrittsquerschnitt $A_2 = 0{,}4306\,m^2$

Turbineneintrittstemperatur $T_1 = 980\,°C$

spez. Gaskonstante $R = 287{,}1\,J/kg \cdot K$

Isentropenexponent $\kappa = 1{,}34$

spez. Wärmekapazitäten c_p, c_v = const.

Isentrope Zustandsänderung

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

ges.:

- Volumenstrom $\dot{V}_2$
- spez. technische Arbeit $w_{t,12}$
- Wellenleistung P

Dichte des einströmenden Gases (Zustandsgleichung des idealen Gases)

$$\rho_1 = \frac{p_1}{R \cdot T_1} = \frac{18{,}9 \cdot 10^5}{287{,}1 \cdot (980 + 273{,}15)} = 5{,}253\,kg/m^3$$

Massestrom

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \rho_1 \cdot \dot{V}_1 = 5{,}253 \cdot \frac{14049}{3600} = 20{,}5\,kg/s$$

Mittlere Geschwindigkeit im Turbineneintritt

$$\bar{c}_1 = \frac{\dot{m}}{\rho_1 \cdot A_1} = \frac{20{,}5}{5{,}253 \cdot 0{,}01942} = 200{,}95\,m/s$$

Austrittstemperatur T_2: Isentrope Expansion (=adiabat, d.h. q_{12} = 0 und reversibel, d.h. verlustfrei)

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = (980 + 273{,}15) \cdot \left(\frac{1{,}02}{18{,}9}\right)^{\frac{1{,}34-1}{1{,}34}} = 597{,}5\,K$$

Dichte des ausströmenden Gases (Zustandsgleichung des idealen Gases)

$$\rho_2 = \frac{p_2}{R \cdot T_2} = \frac{1{,}02 \cdot 10^5}{287{,}1 \cdot 597{,}5} = 0.595\,kg/m^3$$

mittlere Geschwindigkeit im Turbinenaustritt

$$\bar{c}_2 = \frac{\dot{m}}{\rho_2 \cdot A_2} = \frac{20{,}5}{0{,}595 \cdot 0{,}4306} = 80{,}01\,m/s$$

Üb. 4-2: **Stationär durchströmte Gasturbine**

- **Volumenstrom** $\dot{V}_2$

$$\dot{V}_2 = c_2 \cdot A_2 = 80{,}01 \cdot 0{,}4306 = 34{,}453 = 124028\, m^3/h$$

- **spez. technische Arbeit** $w_{t,12}$

spez. technische Arbeit $w_{t,12}$ (1. Hauptsatz für offene stationär durchströmte Systeme)

$$\boxed{q_{12} + w_{t,12} - e_{Diss} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \left(c_2^{\,2} - c_1^{\,2}\right)}_{e_{kin,12}} + \underbrace{g \cdot (z_2 - z_1)}_{e_{pot,12}} + \underbrace{(h_2 - h_1)}_{spez.Enthalpie}}$$

entsprechend den Annahmen

- isentrop, d.h. adiabat (q_{12} = 0) und reibungsfrei (e_{Diss} = 0)
- Ein- und Austrittsebene der Turbine auf gleiche Höhe ($z_1 = z_2$)
- Konstante spez. Wärmekapazitäten c_p, c_v = const.

vereinfacht sich der 1. Hauptsatz zu

$$w_{t,12} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \left(c_2^{\,2} - c_1^{\,2}\right)}_{e_{kin,12}} + \underbrace{(h_2 - h_1)}_{spez.Enthalpie} = \frac{1}{2} \cdot \left(c_2^{\,2} - c_1^{\,2}\right) + c_p \cdot (T_2 - T_1)$$

$$c_p = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot R = \frac{1{,}34}{1{,}34 - 1} \cdot 287{,}1 = 1131{,}5\ J/kg \cdot K$$

$$c_p - c_v = R, \qquad \frac{c_p}{c_v} = \kappa$$

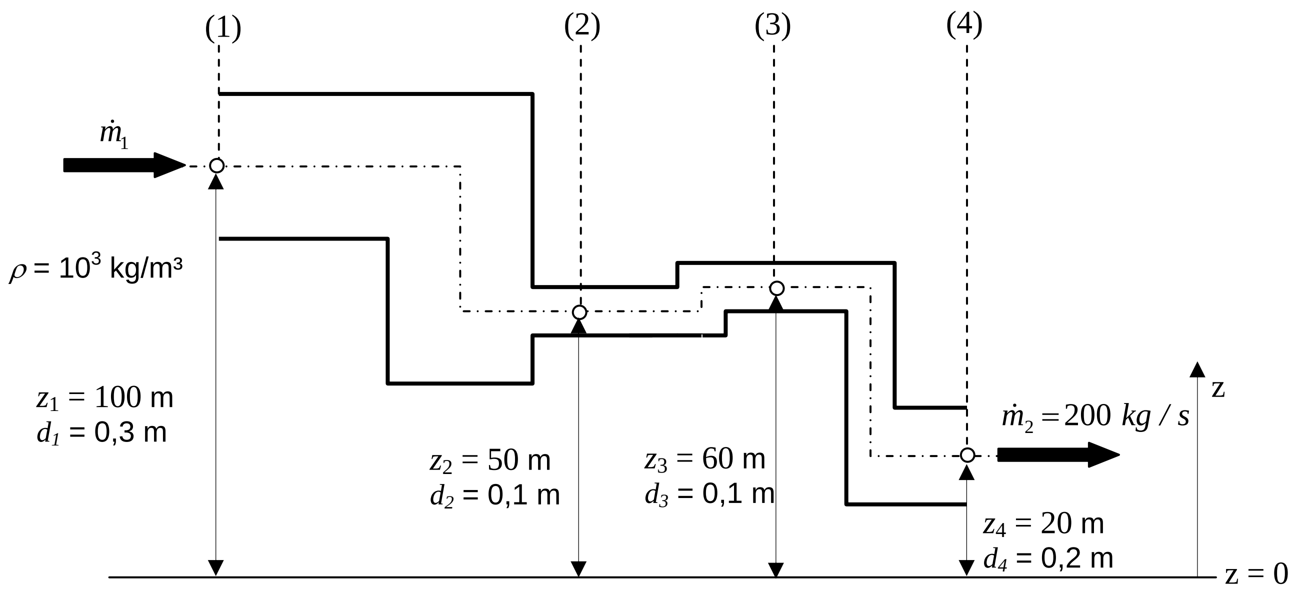
$$w_{t,12} = \frac{1}{2} \cdot \left(80{,}01^2 - 200{,}95^2\right) + 1131{,}5 \cdot (597{,}5 - 1253{,}15) \qquad \boxed{w_{t,12} = -7{,}589 \cdot 10^5\, W \cdot s/kg},$$

davon sind lediglich $-0{,}348 \cdot 10^5\, W \cdot s/kg$, d.h. 2,2% kinetischer Anteil

- **Wellenleistung** P

$$\boxed{P = \dot{m} \cdot w_{t,12} = -20{,}5 \cdot 7{,}589 \cdot 10^5 = -15{,}557\, MW}$$

Üb. 4-3 Verlustfrei durchströmtes Rohrsystem



Berechnen Sie für das verlustfrei durchströmte Rohrsystem an den Positionen (1)-(4) jeweils den

- dynamischen Druck $q = \frac{\rho}{2} \cdot c^2$
- potentiellen Druck $\rho \cdot g \cdot z$
- statischen Druck p
- Gesamtdruck p_{ges}

Der Gesamtdruck im Querschnitt (4) beträgt p_{ges} = 10,85·bar

Berechnung der Geschwindigkeiten mittels Kontinuitätsgleichung

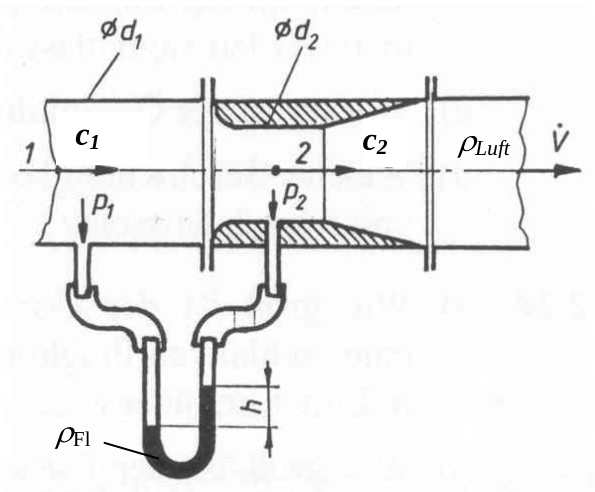
$$\dot{m} = \rho \cdot c \cdot A = const. \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\dot{m}}{\rho \cdot A}.$$

Berechnung des statischen Drucks p mittels Bernoulli-Gleichung (z.B. Druckform)

$$p_{ges} = \frac{\rho}{2} \cdot c^2 + \rho \cdot g \cdot z + p = const. \quad \Rightarrow \quad p = p_{ges} - \frac{\rho}{2} \cdot c^2 - \rho \cdot g \cdot z$$

Position			**1**	**2**	**3**	**4**
Durchmesser	d	m	0,3	0,1	0,1	0,2
Höhe	z	m	100	50	60	20
Geschwindigkeit	c	m/s	2,83	25,46	25,46	6,37
dynamischer Druck	$\rho/2 \cdot c^2$	Pa	4004	324106	324106	20288
potentieller Druck	$\rho \cdot g \cdot z$	Pa	981000	490500	588600	196200
statischer Druck	p	Pa	10^5	270389	172298	868516
Gesamtdruck	p_{ges}	Pa	$1{,}085 \cdot 10^6$	$1{,}085 \cdot 10^6$	$1{,}085 \cdot 10^6$	$1{,}085 \cdot 10^6$

Üb. 4-4: **Venturi-Rohr: Durchflussmessung**



geg.:

d_1	=	150	mm
d_2	=	100	mm
ρ_{Luft}	=	1,225	kg/m³
$p_1 - p_2$	=	250	mmWS

ges.: Volumenstrom $\dot{V}$

Druckform der Bernoulli-Gleichung, Bilanz (1) – (2)

$$\frac{\rho}{2}\cdot c_1^{\,2} + \rho\cdot g\cdot z_1 + p_1 = \frac{\rho}{2}\cdot c_2^{\,2} + \rho\cdot g\cdot z_2 + p_2$$

Annahmen

$z_1 = z_2$ (horizontale Anordnung)

Kontinuitätsgleichung

$$\dot{V} = A_1\cdot c_1 = A_2\cdot c_2$$

$$\Rightarrow \qquad c_1 = c_2\cdot\frac{A_2}{A_1}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\rho}{2}\cdot c_1^{\,2} + p_1 = \frac{\rho}{2}\cdot c_2^{\,2} + p_2$$

$$\frac{\rho}{2}\cdot c_2^{\,2}\cdot\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 + p_1 = \frac{\rho}{2}\cdot c_2^{\,2} + p_2 \qquad \Bigg|\cdot\frac{2}{\rho}$$

$$c_2^{\,2}\cdot\left[\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 - 1\right] = \left(p_2 - p_1\right)\cdot\frac{2}{\rho}$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{2\cdot\left(p_1 - p_2\right)}{\rho\cdot\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]}}$$

$$\Rightarrow \qquad \dot{V} = c_2\cdot A_2 = \sqrt{\frac{2\cdot\left(p_1 - p_2\right)}{\rho\cdot\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]}}\cdot A_2$$

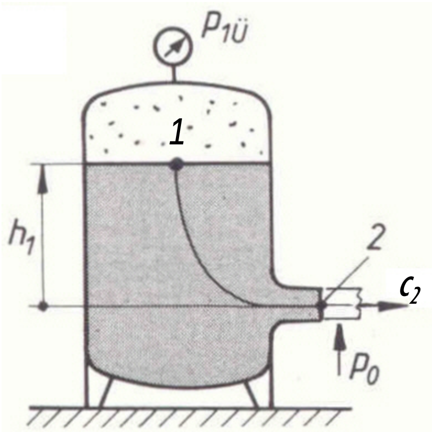
$$\dot{V} = c_2 \cdot A_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho \cdot \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]}} \cdot A_2$$

mit

$$p_2 - p_1 = \rho_{Fl} \cdot g \cdot h = 250\,mmWS = 250 \cdot 9{,}80665 = 2452\,Pa$$

$$\Rightarrow \qquad \dot{V} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2452}{1.225 \cdot \left[1 - \left(\frac{0{,}1}{0{,}15}\right)^4\right]}} \cdot \left(\frac{\pi}{4} \cdot 0{,}1^2\right) = 0{,}5547\,\frac{m^3}{s}$$

Üb. 4-5: Ausfluß aus einem Behälter unter Überdruck -verlustfrei



geg.:

$P_{1Ü}$	=	1 bar
h_1	=	2 m
d_2	=	2 cm
ρ_{H2O}	=	1000 kg/m³

ges.: c_2, $\dot{V}$

Druckform der Bernoulli-Gleichung, Bilanz (1) – (2)

$$\frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 + \rho \cdot g \cdot z_1 + p_1 = \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 + \rho \cdot g \cdot z_2 + p_2$$

Annahmen

$A_1 >> A_2 \quad \Rightarrow \quad c_1 \approx 0$

$p_1 = p_{1Ü} + p_0$

$p_2 = p_0$ (Freistrahl)

$z_1 = h_1$

$z_2 = 0$ (Referenzniveau)

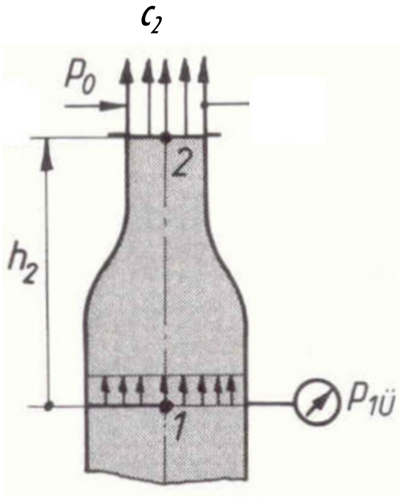
$$\Rightarrow \qquad \rho \cdot g \cdot h_1 + p_{1Ü} + p_0 = \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 + p_0$$

$$c_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1 + 2 \cdot \frac{p_{1Ü}}{\rho}}$$

$$c_2 = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{10^5}{10^3}} = 15{,}47\,\frac{m}{s}$$

$$\dot{V} = c_2 \cdot A_2 = 15{,}47 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0.02^2 = 0{,}00486\,\frac{m^3}{s}$$

Üb. 4-6: Ausfluß aus einem Benzinschlauch unter Überdruck -verlustfrei



geg.:

$P_{1Ü}$ =	=	4 [bar]
h_2	=	0,2 [m]
d_1	=	10 [mm]
d_2	=	2 [mm]
ρ_{Benzin}	=	780 [kg/m³]

ges.:

c_2 Ausströmgeschwindigkeit

Druckform der Bernoulli-Gleichung (1) – (2)

$$\frac{\rho}{2} \cdot c_1^{\,2} + \rho \cdot g \cdot z_1 + p_1 = \frac{\rho}{2} \cdot c_2^{\,2} + \rho \cdot g \cdot z_2 + p_2$$

Annahmen

$p_1 = p_{1Ü} + p_0$

$p_2 = p_0$ Atmosphärendruck

$z_1 = 0$ Bezugshöhe

$z_2 = h_2$

Kontinuitätsgleichung

$$A_1 \cdot c_1 = A_2 \cdot c_2 \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = c_2 \cdot \frac{A_2}{A_1}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\rho}{2} \cdot c_2^{\,2} \cdot \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 + p_{1Ü} + p_0 = \frac{\rho}{2} \cdot c_2^{\,2} + \rho \cdot g \cdot h_2 + p_0$$

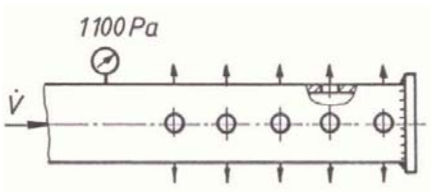
$$\frac{c_2^{\,2}}{2} \cdot \left[\left(\frac{A_2}{A_1}\right) - 1^2\right] = \rho \cdot g \cdot h_2 - p_{1Ü}$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(\frac{p_{1Ü}}{\rho} - g \cdot h_2\right)}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \qquad c_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(\frac{4 \cdot 10^5}{780} - 9{,}81 \cdot 0{,}2\right)}{1 - \left(\frac{0{,}002}{0{,}01}\right)^4}} = 31{,}99 \left[\frac{m}{s}\right]$$

Üb. 4-7: Auslegung eines Belüftungssystems

Belüftungsrohr mit scharfkantigen Ausblaslöchern



geg.:

$\dot{V} = 0{,}7\,\frac{m^3}{s}$ Luftstrom $d = 10\,mm$

$p_Ü = 1100\ Pa$ Überdruck

$\rho_{Luft} = 1{,}2\ \frac{kg}{m^3}$ Luftdichte

$\alpha = 0{,}6$ Kontraktionszahl

$c_{zu} = 10\,\frac{m}{s}$ Zuströmgeschwindigkeit

ges.:
- Durchmesser des Rohres
- Anzahl der Bohrungen im Belüftungsrohr
-Ist die Annahme einer inkompressiblen Strömung gerechtfertigt?

1. Durchmesser des Rohres

$$\dot{V} = c_{zu} \cdot A_R \Rightarrow \quad A_R = \frac{\dot{V}}{c_{zu}}$$

$$\Rightarrow \quad D_R = \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot \frac{\dot{V}}{c_{zu}}} = \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot \frac{0{,}7}{10}} = 0{,}299\,m$$

2. Anzahl der Bohrungen im Belüftungsrohr?

$$\dot{V} = n \cdot A_L \cdot \alpha \cdot c_2 \qquad \Rightarrow \qquad n = \frac{\dot{V}}{A_L \cdot \alpha \cdot c_2}$$

Druckform der Bernoulli-Gleichung (1) – (2)

$$\frac{\rho}{2} \cdot c_1^{\ 2} + \rho \cdot g \cdot z_1 + p_1 = \frac{\rho}{2} \cdot c_2^{\ 2} + \rho \cdot g \cdot z_2 + p_2$$

Annahmen

$c_1 = c_{zu}$
$p_1 = p_{1Ü} + p_0$
$p_2 = p_0$ Atmosphärendruck
$z_1 = z_2 = 0$ Rohr verläuft horizontal

$$\Rightarrow \quad \frac{\rho}{2} \cdot c_{zu}^{\ 2} + p_{1Ü} + p_0 = \frac{\rho}{2} \cdot c_2^{\ 2} + p_0$$

$$\Rightarrow \quad c_2 = \sqrt{c_{zu}^{\ 2} + \frac{2 \cdot p_Ü}{\rho}} = \sqrt{10^2 + \frac{2 \cdot 1100}{1{,}2}} = 43{,}97\,\frac{m}{s}$$

$$n = \frac{\dot{V}}{A_L \cdot \alpha \cdot c_2} = \frac{0{,}7}{\frac{\pi}{4} \cdot 0{,}01^2 \cdot 0{,}6 \cdot 43{,}97} \approx 338$$

3. Annahme einer inkompressiblen Strömung

Voraussetzung: $M < 0{,}3$

Hierbei wird stillschweigend vorausgesetzt, dass eine Lufttemperatur von 15°C = 288,15 K vorliegt, somit beträgt die Schallgeschwindigkeit $a = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287{,}05 \cdot 288{,}15} = 340{,}3\, m/s$.

Die Ausströmgeschwindigkeit von 43,97 m/s beträgt also gerade $M = c/a = 0{,}12$ und liegt somit noch deutlich im (näherungsweise) inkompressiblen Bereich.
