Kapitel 4 – Musterlösungen Teil2

Üb. 4-8: Grenzschicht der längs angeströmte ebene Platte

geg.: $c_\infty = 50\,km/h$, $\nu_{Luft} = 15{,}1 \cdot 10^{-6}\,m^2/s$, $R_{krit} = 3 \cdot 10^5$

ges.: Lage des Umschlagpunkts

Dicke der Grenzschicht am Umschlagpunkt

Dicke der Grenzschicht nach einer Lauflänge von l = 1 m

$$\mathrm{Re}_{krit} = \frac{c_\infty \cdot x_{krit}}{\nu_{Luft}} \quad \Rightarrow \quad x_{krit} = \frac{Re_{krit} \cdot \nu_{Luft}}{c_\infty} = \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 15{,}1 \cdot 10^{-6}}{\frac{50}{3{,}6}} = 0{,}33\ m$$

$$\delta_{lam} = 5 \cdot \frac{x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \quad \Rightarrow \quad \delta_{lam} = 5 \cdot \frac{0{,}33}{\sqrt{3 \cdot 10^5}} = 0{,}003\,m$$

$$\delta_{turb} = 0{,}37 \cdot \frac{x'}{\sqrt[5]{Re_{x'}}} \quad \Rightarrow \quad \delta_{turb} = 0{,}37 \cdot \frac{1 - 0{,}33}{\sqrt[5]{\frac{50 \cdot (1 - 0{,}33)}{3{,}6 \cdot 15{,}1 \cdot 10^{-6}}}} = 0{,}017\,m$$

Üb. 4-9: Windlast auf einen Kamin

Ein Kamin mit einer Höhe H = 100 m hat am Boden einen Durchmesser d_1 = 6 m und an der Spitze einen Durchmesser d_2 = 0,5 m. Der Durchmesser ändert sich linear mit der Höhe. Die Windgeschwindigkeit beträgt c_∞ = 1,6 m/s. Bei einer Dichte von ρ = 1,234 kg/m³ beträgt die kinematische Zähigkeit der Luft $\nu = 15 \cdot 10^{-6}$ m²/s.

Der Widerstandsbeiwert des Kamins kann im unterkritischen Bereich ($Re_d < 3{,}5 \cdot 10^5$) mit $c_{w,unter}$ = 1.2 und im überkritischen Bereich mit $c_{w,über}$ = 0,4 abgeschätzt werden.

Wie hoch ist unter diesen Bedingungen die resultierende Kraft auf den Kamin?

Windlast auf ein Kreiszylindersegment des Kamins mit der Dicke dz in der Höhe z

$$dW = c_W \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c_\infty{}^2 \cdot d(z) \cdot dz$$

Gesamte Windlast auf den Kamin

$$W = \int_{z=0}^{z=H} c_W \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c_\infty{}^2 \cdot d(z) \cdot dz$$

Abhängigkeit des Durchmessers $d(z)$ von der Höhe

$$d(z) = -\frac{d_1 - d_2}{H} \cdot z + d_1$$

Eingesetzt in den Gesamtwiderstand

$$W = \int_{z=0}^{z=H} c_W \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c_\infty{}^2 \cdot \left(-\frac{d_1 - d_2}{H} \cdot z + d_1 \right) \cdot dz$$

In welcher Höhe schlägt die Strömung von unterkritisch zu überkritisch um, d.h. an welcher Stelle liegt eine Reynoldszahl von $Re_d = 3{,}5 \cdot 10^5$ vor?

Kritische Reynoldszahl

$$\mathrm{Re}_{krit} = \frac{c_\infty \cdot d_{krit}}{\nu} = \frac{c_\infty}{\nu} \cdot \left(-\frac{d_1 - d_2}{H} \cdot z_{krit} + d_1 \right)$$

Höhe z_{krit} des Umschlagpunktes

$$z_{krit} = \left(\frac{\nu \cdot \mathrm{Re}_{krit}}{c_\infty} - d_1 \right) \cdot \frac{H}{d_2 - d_1}$$

$$z_{krit} = \left(\frac{15 \cdot 10^{-6} \cdot 3{,}5 \cdot 10^5}{1{,}6} - d_1 \right) \cdot \frac{100}{0{,}5 - 6} = 49{,}4\,m$$

Aufteilung des Integrals zur Berechnung des Gesamtwiderstands in zwei Anteile

$$W = \int_{z=0}^{z=H} c_W \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c_\infty{}^2 \cdot \left(-\frac{d_1 - d_2}{H} \cdot z + d_1 \right) \cdot dz$$

$$W = \int_{z=0}^{z=z_{krit}} c_{W,über} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c_\infty{}^2 \cdot \left(-\frac{d_1 - d_2}{H} \cdot z + d_1 \right) \cdot dz + \int_{z=z_{krit}}^{z=H} c_{W,unter} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c_\infty{}^2 \cdot \left(-\frac{d_1 - d_2}{H} \cdot z + d_1 \right) \cdot dz$$

$$W = \frac{\rho}{2} \cdot c_\infty{}^2 \cdot \left[c_{W,über} \cdot \left(\frac{d_2 - d_1}{2 \cdot H} \cdot z_{krit}{}^2 + d_1 \cdot z_{krit} \right) + c_{W,unter} \cdot \frac{d_2 - d_1}{2 \cdot H} \cdot \left(H^2 - z_{krit}{}^2 \right) + c_{W,unter} \cdot d_1 \cdot \left(H - z_{krit} \right) \right]$$

$$W = \frac{1{,}234}{2} \cdot 1{,}6^2 \cdot \left[0{,}4 \cdot \left(\frac{0{,}5-6}{2 \cdot 100} \cdot 49{,}4^2 + 6 \cdot 49{,}4 \right) + 1{,}2 \cdot \frac{0{,}5-6}{2 \cdot 100} \cdot \left(100^2 - 49{,}4^2 \right) + 1{,}2 \cdot 6 \cdot (100 - 49{,}4) \right]$$

$$W = 326{,}3\,N$$

Üb: 4-10: Aerodynamischer Widerstand eines Kamins

geg.:

c_∞	=	40	m/s	Windgeschwindigkeit
D	=	0,25	m	Kamindurchmesser
H	=	8	m	Kaminhöhe
T	=	20	°C	Lufttemperatur
p	=	1020	hPa	Luftdruck

ges.:

Resultierende Kraft F auf den Kamin

Üb: 4-10: Aerodynamischer Widerstand eines Kamins

1. Reynoldszahl

$$\mathrm{Re} = \frac{c_\infty \cdot D}{\nu} = \frac{c_\infty \cdot D \cdot \rho}{\mu}$$

dynamische Viskosität μ (Sutherland-Formel)

$$\mu = 1{,}458 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{T^{1,5}}{T + 110{,}4}$$

$$\mu = 1{,}458 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{(20 + 273{,}15)^{1,5}}{(20 + 273{,}15) + 110{,}4} = 1{,}8134 \cdot 10^{-5}\, Pa \cdot s$$

Dichte ρ (ideale Gasgleichung)

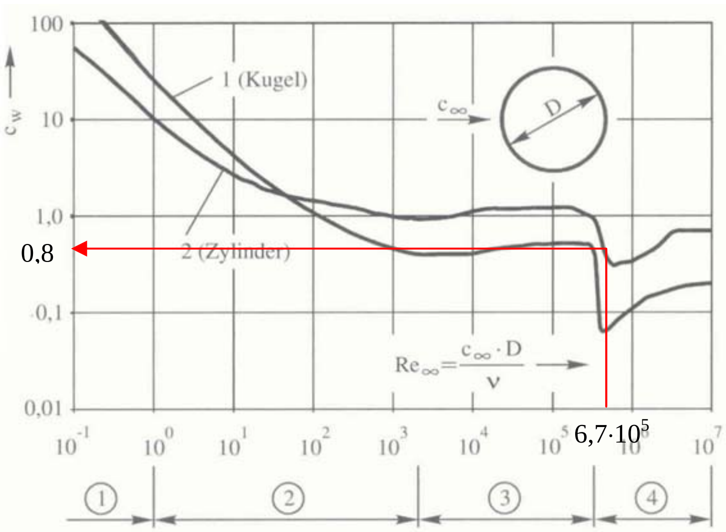
$$\rho = \frac{p}{R \cdot T} = \frac{1020 \cdot 100}{287 \cdot (20 + 273{,}15)} = 1{,}212 \frac{kg}{m^3}$$

kinematische Viskosität ν

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{m^2}{s}\right] = \frac{1{,}8134 \cdot 10^{-5}}{1{,}212} = 1{,}4962 \cdot 10^{-5}\ \frac{m^2}{s}$$

$\Rightarrow$ $Re = \dfrac{c_\infty \cdot D}{\nu} = \dfrac{40 \cdot 0{,}25}{1{,}4962 \cdot 10^{-5}} = 6{,}7 \cdot 10^5$ (bezogen auf Durchmesser des Zylinders)

2. Widerstandsbeiwert c_W des unendlich langen Zylinders



$Re = 6{,}7 \cdot 10^5 \quad \Rightarrow$

$$c_W\left(\frac{H}{D} = \infty\right) \approx 0{,}8$$

Korrektur für $\dfrac{H}{D} = \dfrac{8}{0{,}25} = 32$

$\Rightarrow \quad K \approx 0{,}8$

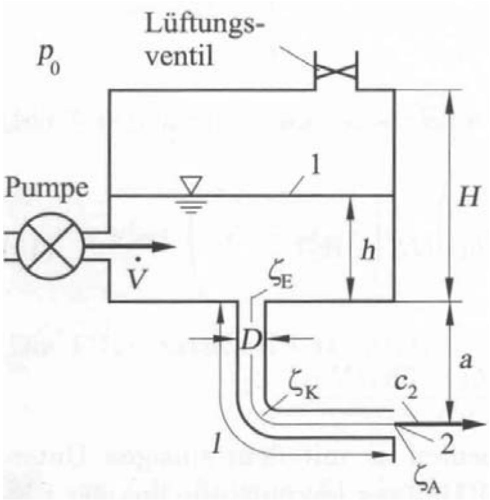
$$c_W\left(\frac{H}{D} = 32\right) = 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}64$$

3. Kraft auf Zylinder

$$F = c_W \cdot \bar{q} \cdot A = c_W \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c_\infty{}^2 \cdot H \cdot D$$

$$F = 0{,}64 \cdot \frac{1{,}212}{2} \cdot 40^2 \cdot 8 \cdot 0{,}25 = 1241\, N$$

Üb: 4-11: Rohrströmung



Ein Behälter wird über eine Pumpe mit einem Volumenstrom $\dot{V}$ versorgt. Das Wasser verläßt den Behälter über ein gekrümmtes Abflußrohr mit einer Gesamtlänge l und einer mittleren Rauigkeit k in die freie Umgebung. Der Wasserspiegel im Behälter bleibt konstant.

geg.:
$\dot{V} = 3{,}6 \cdot 10^{-3}\, m^3/s$, D = 0,0276 m, l = 2 m,
a = 1 m, H = 6 m, p_0 = 1 bar, $k = 10^{-6}$ m,
ζ_E = 0,05, ζ_A = 0,05, ζ_K = 0,14, $\nu = 1 \cdot 10^{-6}$ m²/s,
ρ = 1000 kg/m³

ges.:
Das Lüftungsventil ist geöffnet
1. Austrittsgeschwindigkeit c_2
2. Berechnen Sie die Rohreibungszahl λ im Abflussrohr
3. Wie hoch ist der Wasserspiegel h im Inneren des Behälters?

Bei Überschreiten der Pegelhöhe h schließt das Lüftungsventil und bleibt geschlossen. Der neue Volumenstrom beträgt $\dot{V}' = 2 \cdot \dot{V}$ und die neue Pegelhöhe h' bleiben wieder konstant.

4. Neue Austrittsgeschwindigkeit c_2'
5. Kann die Rohrwand immer noch als hydraulisch glatt betrachtet werden?
6. Luftdruck im Behälter als Funktion des Pegelstandes bei isothermer Kompression
7. Wie hoch ist der Wasserspiegel h' im Inneren des Behälters?

1. Austrittsgeschwindigkeit c_2

Kontinuitätsgleichung

$$\dot{V} = const. = c_2 \cdot A = c_2 \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4} \qquad \Rightarrow \qquad c_2 = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot D^2} = \frac{4 \cdot 3{,}6 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0{,}0276^2} = 6\frac{m}{s}$$

2. Berechnen Sie die Rohreibungszahl λ im Abflussrohr

Bedingung für 'hydraulisch glatt':

$$\frac{k}{d} \le \frac{8}{\mathrm{Re} \cdot \sqrt{\lambda}}$$ relative Rauigkeit

mit $k = 10^{-6}$ m

$$\frac{k}{D} = \frac{10^{-6}}{0{,}0276} = 3{,}623 \cdot 10^{-5}$$

Reynoldszahl bezogen auf den Rohrdurchmesser D

$$Re = \frac{c_2 \cdot D}{\nu} = \frac{6 \cdot 0{,}0276}{10^{-6}} = 165600$$

Üb: 4-11: Rohrströmung

Rohrreibungszahl

$$\lambda = 0{,}0032 + \frac{0{,}221}{Re^{0{,}237}} \qquad \text{für} \qquad 2300 < Re < 10^6 \qquad \text{(Nikuradse)}$$

$$\lambda = 0{,}016$$

$$\frac{8}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} = \frac{8}{165600 \cdot \sqrt{0{,}016}} = 3{,}82 \cdot 10^{-4} > \frac{k}{D} = 3{,}623 \cdot 10^{-5}$$

$\Rightarrow$ Bedingung für 'hydraulisch glatte' Oberfläche ist erfüllt

3. Wie hoch ist der Wasserspiegel h im Inneren des Behälters?

Bilanz (Druckform) von (1) nach (2) unter Berücksichtigung von Verlusten Δp_V

$$p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot c_1^{\ 2} + \rho \cdot g \cdot z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot c_2^{\ 2} + \rho \cdot g \cdot z_2 + \Delta p_{V,1-2}$$

mit $c_1 = 0$, $p_1 = p_2 = p_0$, $z_1 = a + h$, $z_2 = 0$
vereinfacht sich die Bilanz zu

$$\Rightarrow \quad \rho \cdot g \cdot (a + h) = \frac{\rho}{2} \cdot c_2^{\ 2} + \Delta p_V$$

Der Druckverlust Δp_V setzt sich zusammen aus

- Rohrreibungsverlust $\quad \Delta p = \lambda \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c^2$
- Einlaufverlust $\quad \Delta p = \zeta_E \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c^2$
- Verlust infolge der Rohrkrümmung $\quad \Delta p = \zeta_K \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c^2$
- Austrittsverlust $\quad \Delta p = \zeta_A \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c^2$

$$\Rightarrow \quad \Delta p_V = \frac{\rho}{2} \cdot c_2^{\ 2} \cdot \left(\lambda \cdot \frac{l}{D} + \zeta_E + \zeta_K + \zeta_A \right)$$

$$\rho \cdot g \cdot (a + h) = \frac{\rho}{2} \cdot c_2^{\ 2} + \Delta p_V$$

$$\Rightarrow \quad \rho \cdot g \cdot (a + h) = \frac{\rho}{2} \cdot c_2^{\ 2} + \frac{\rho}{2} \cdot c_2^{\ 2} \cdot \left(\lambda \cdot \frac{l}{D} + \zeta_E + \zeta_K + \zeta_A \right)$$

$$\Rightarrow \quad \rho \cdot g \cdot (a + h) = \frac{\rho}{2} \cdot c_2^{\ 2} \cdot \left(1 + \lambda \cdot \frac{l}{D} + \zeta_E + \zeta_K + \zeta_A \right)$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{c_2^{\ 2}}{2 \cdot g} \cdot \left(1 + \lambda \cdot \frac{l}{D} + \zeta_E + \zeta_K + \zeta_A \right) - a$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{6^2}{2 \cdot 9{,}81} \cdot \left(1 + 0{,}016 \cdot \frac{2}{0{,}0276} + 0{,}05 + 0{,}14 + 0{,}05 \right) - 1$$

$$\Rightarrow \quad h = 3{,}4\,m$$

Üb: 4-11: Rohrströmung

Bei Überschreiten der Pegelhöhe h schließt das Lüftungsventil und bleibt geschlossen. Der neue Volumenstrom beträgt $\dot{V}' = 2 \cdot \dot{V}$ und die neue Pegelhöhe h' bleibt wieder konstant.

4. Neue Austrittsgeschwindigkeit c_2' bei doppeltem Volumenstrom $\dot{V}' = 2 \cdot \dot{V}$

Doppelter Volumenstrom ergibt über die Kontinuitätsgleichung eine doppelt so große Austrittsgeschwindigkeit

$$c_2' = 2 \cdot c_2 = 2 \cdot 6 = 12 \frac{m}{s}$$

5. Berechnen Sie die Rohreibungszahl λ im Abflussrohr

$$\frac{k}{d} \leq \frac{8}{\mathrm{Re} \cdot \sqrt{\lambda}}$$ relative Rauhigkeit

mit $k = 10^{-6}$ m

$$\frac{k}{D} = \frac{10^{-6}}{0{,}0276} = 3{,}623 \cdot 10^{-5}$$

Reynoldszahl bezogen auf den Rohrdurchmesser D

$$Re' = 2 \cdot Re = \frac{c_2' \cdot D}{\nu} = \frac{12 \cdot 0{,}0276}{10^{-6}} = 331200$$

Berechnung der Rohrreibungszahl λ' bei doppelter Strömungsgeschwindigkeit

$$\lambda' = 0{,}0032 + \frac{0{,}221}{Re^{0{,}237}}$$ für $2300 < Re < 10^6$ (Nikuradse)

$$\lambda' = 0{,}014$$

$$\frac{k}{d} \leq \frac{8}{\mathrm{Re} \cdot \sqrt{\lambda}} \quad \Leftrightarrow \quad 3{,}623 \cdot 10^{-5} \leq \frac{8}{331200 \cdot \sqrt{0{,}014}} = 2{,}04 \cdot 10^{-4}$$

$\Rightarrow$ Bedingung für 'hydraulisch glatt' ist erfüllt

6. Luftdruck im Behälter als Funktion des Pegelstandes h' bei isothermer Kompression

Isotherme Zustandsänderung

$$p \cdot V = const. \quad \Rightarrow \quad p_1 \cdot V_1 = p' \cdot V' \quad \Rightarrow \quad p' = p_1 \cdot \frac{V_1}{V'}$$

mit

$$V_1 = A \cdot (H - h), \quad V' = A \cdot (H - h') \quad \text{und} \quad p_1 = p_0 = 1 bar$$

folgt

$$p' = p_1 \cdot \frac{V_1}{V'} = p_0 \cdot \frac{H - h}{H - h'}$$

Üb: 4-11: Rohrströmung

7. Wie hoch ist der Wasserspiegel h' im Inneren des Behälters?

Berechnung von h' aus der Bernoulli-Gleichung (Druckform) von (1) nach (2) unter Berücksichtigung von Verlusten Δp_V

$$\frac{\rho}{2}\cdot c_1^{\,2}+\rho\cdot g\cdot z_1+p_1=\frac{\rho}{2}\cdot c_2^{\prime 2}+\rho\cdot g\cdot z_2+p_2+\Delta p_V^{\prime}$$

mit

$c_1=0$, $p_1=p'$, $p_2=p_0$, $z_1=(a+h')$ und $z_2=0$

lautet die Bernoulli-Gleichung von (1) nach (2)

$$p_0\cdot\frac{H-h}{H-h'}+\rho\cdot g\cdot(a+h')=p_0+\frac{\rho}{2}\cdot c_2^{\prime 2}+\Delta p_V^{\prime}$$

$$\Rightarrow\quad p_0\cdot(H-h)+\rho\cdot g\cdot(a+h')\cdot(H-h')=H\cdot\left(p_0+\frac{\rho}{2}\cdot c_2^{\prime 2}+\Delta p_V^{\prime}\right)-h'\cdot\left(p_0+\frac{\rho}{2}\cdot c_2^{\prime 2}+\Delta p_V^{\prime}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \rho\cdot g\cdot(a+h')\cdot(H-h')=-p_0\cdot(H-h)+H\cdot\left(p_0+\frac{\rho}{2}\cdot c_2^{\prime 2}+\Delta p_V^{\prime}\right)-h'\cdot\left(p_0+\frac{\rho}{2}\cdot c_2^{\prime 2}+\Delta p_V^{\prime}\right)$$

$$\Rightarrow\quad -\rho\cdot g\cdot\left[h'^2+h'\cdot(a-H)-a\cdot H\right]=-p_0\cdot(H-h)+H\cdot\left(p_0+\frac{\rho}{2}\cdot c_2^{\prime 2}+\Delta p_V^{\prime}\right)-h'\cdot\left(p_0+\frac{\rho}{2}\cdot c_2^{\prime 2}+\Delta p_V^{\prime}\right)$$

$$\Rightarrow\quad h'^2+h'\cdot(a-H)-a\cdot H=\frac{p_0\cdot(H-h)}{\rho\cdot g}-\frac{H}{\rho\cdot g}\cdot\left(p_0+\frac{\rho}{2}\cdot c_2^{\prime 2}+\Delta p_V^{\prime}\right)+h'\cdot\frac{1}{\rho\cdot g}\left(p_0+\frac{\rho}{2}\cdot c_2^{\prime 2}+\Delta p_V^{\prime}\right)$$

$\Rightarrow$

$$h'^2+h'\cdot(a-H)-h'\cdot\frac{1}{\rho\cdot g}\left(p_0+\frac{\rho}{2}\cdot c_2^{\prime 2}+\Delta p_V^{\prime}\right)-a\cdot H-\frac{p_0\cdot(H-h)}{\rho\cdot g}+\frac{H}{\rho\cdot g}\cdot\left(p_0+\frac{\rho}{2}\cdot c_2^{\prime 2}+\Delta p_V^{\prime}\right)=0$$

$\Rightarrow$

$$h'^2+h'\cdot\underbrace{\left(a-H-\frac{p_0}{\rho\cdot g}-\frac{c_2^{\prime 2}}{2\cdot g}-\frac{\Delta p_V^{\prime}}{\rho\cdot g}\right)}_{=A}+\underbrace{\left(-a\cdot H-\frac{p_0\cdot(H-h)}{\rho\cdot g}+\frac{H}{\rho\cdot g}\cdot\left(p_0+\frac{\rho}{2}\cdot c_2^{\prime 2}+\Delta p_V^{\prime}\right)\right)}_{=B}=0$$

Üb: 4-11: Rohrströmung

$\Rightarrow \quad h'^2 + A \cdot h' + B = 0$

$\Rightarrow \quad h'_{1,2} = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - B}$

mit

$$\Delta p_V{}' = \frac{\rho}{2} \cdot c_2{}'^2 \cdot \left(\lambda' \cdot \frac{l}{D} + \zeta_E + \zeta_K + \zeta_A\right) = \frac{1000}{2} \cdot 12^2 \cdot \left(0{,}014 \cdot \frac{2}{0{,}0276} + 0{,}05 + 0{,}14 + 0{,}05\right) = 90323\,Pa$$

und

$$A = a - H - \frac{p_0}{\rho \cdot g} - \frac{c_2{}'^2}{2 \cdot g} - \frac{\Delta p_V{}'}{\rho \cdot g}$$

$\Rightarrow \quad A = 1 - 6 - \frac{10^5}{1000 \cdot 9{,}81} - \frac{12^2}{2 \cdot 9{,}81} - \frac{90323}{1000 \cdot 9{,}81} = -31{,}74$

$$B = -a \cdot H - \frac{p_0 \cdot (H - h)}{\rho \cdot g} + \frac{H}{\rho \cdot g} \cdot \left(p_0 + \frac{\rho}{2} \cdot c_2{}'^2 + \Delta p_V{}'\right)$$

$\Rightarrow \quad B = -1 \cdot 6 - \frac{10^5 \cdot (6 - 3.4)}{1000 \cdot 9{,}81} + \frac{6}{1000 \cdot 9{,}81} \cdot \left(10^5 + \frac{1000}{2} \cdot 12^2 + 90323\right) = 127{,}94$

folgt

$\Rightarrow \quad h'_{1,2} = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - B} = \frac{31{,}74}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{31{,}74}{2}\right)^2 - 127{,}94}$

$h'_1 = 27{,}0\,m$ (physikalisch nicht sinnvoll wegen $h_1' > H$)

$h'_2 = 4{,}74\,m$