Übung 5-1

Bei Ihrem letzten Ferienjob auf dem Golfplatz haben Sie sich ständig die Frage gestellt, warum Golfbälle offensichtlich unter Cellulitis leiden und nicht über eine glatt polierte Oberfläche verfügen. Als angehender Ingenieur nun eine für Sie leicht zu beantwortende Frage.

Im ersten Schritt betrachten Sie den Fall einer glatt polierten Kugel, die den gleichen Durchmesser hat, wie ein Golfball.

Dabei treffen Sie folgende Annahmen:

Sie gehen von einer mittleren Fluggeschwindigkeit von c_∞ = 288 km/h = 80 m/s aus. Der Durchmesser der Kugel beträgt d = 43 mm und die kinematische Zähigkeit von Luft beträgt ungefähr $\nu = 15 \cdot 10^{-6}$ m²/s. Es liegen die Bedingungen der Normatmosphäre auf Meeresniveau vor, das heißt p = 1013,25 hPa, ρ = 1,225 kg/m³, T = 15 °C.

1. Berechnen Sie den Gesamtwiderstand der glatt polierten Kugel

2. Berechnen Sie den Gesamtwiderstand des Golfballs.

Dabei können Sie aufgrund der Dellen auf der Oberfläche davon ausgehen, dass eine vollständig turbulente Grenzschicht vorliegt.

3. Welchen Anteil hat der Reibungswiderstand im Verhältnis zum Gesamtwiderstand in beiden Fällen?

1. Gesamtwiderstand der glatt polierten Kugel

Um den dimensionslosen Beiwert des Gesamtwiderstands der Kugel aus dem Diagramm ablesen zu können benötigen Sie zuerst die Reynolds-Zahl, die mit dem Kugeldurchmesser bestimmt wird.

$$Re_\mathrm{d} = \frac{c_\infty \cdot d}{\nu} = \frac{80 \cdot 0{,}043}{15 \cdot 10^{-6}} = 2{,}3 \cdot 10^5$$

Bei dieser Reynolds-Zahl liegen Sie noch links der steilen Flanke, die den Übergang von einer laminaren Grenzschicht zu einer turbulenten Grenzschicht kennzeichnet. Es liegt also eine laminare Grenzschicht vor, die leider bereits bei einem Winkel von φ = 70° – 80° sich von der Oberfläche ablöst und ein entsprechend großes Ablösegebiet im Nachlauf bildet.

Als Widerstandsbeiwert lesen Sie für diese Reynolds-Zahl aus dem Diagramm den Wert von $C_\mathrm{W} \approx 0{,}4$ ab. Somit ergibt sich für den aerodynamischen Gesamtwiderstand W der Kugel

$$W = C_\mathrm{W} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot {c_\infty}^2 \cdot S_\mathrm{ref} = C_\mathrm{W} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot {c_\infty}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = 0{,}4 \cdot \frac{1{,}225}{2} \cdot 80^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}043^2 = 2{,}28\ \mathrm{N}$$

2. Gesamtwiderstand des Golfballs

Infolge der Dellen auf der Oberseite des Golfballs, die als Stolperdraht wirken, können Sie davon ausgehen, dass trotz der eigentlich zu niedrigen Reynolds-Zahl eine turbulente Grenzschicht vorliegt, die erfreulich lange an der Oberfläche des Golfballs verbleibt und erst bei einem Winkel von ungefähr φ = 110° - 120° ablöst. Daher können Sie für diesen Fall den Beiwert des Gesamtwiderstands mit $C_\mathrm{W} \approx 0{,}1$ abschätzen.

Somit ergibt sich für den aerodynamischen Gesamtwiderstand *W* des Golfballs

$$W = C_{\mathrm{W}} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c_{\infty}{}^{2} \cdot S_{\mathrm{ref}} = C_{\mathrm{W}} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c_{\infty}{}^{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^{2} = 0{,}1 \cdot \frac{1{,}225}{2} \cdot 80^{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}043^{2} = 0{,}57\ \mathrm{N}$$

oder das Verhältnis

$$W_{\mathrm{turbulent}} = 0{,}25 \cdot W_{\mathrm{laminar}} = 0{,}25 \cdot 2{,}28 = 0{,}57\ \mathrm{N}$$

3. Welchen Anteil hat der Reibungswiderstand im Verhältnis zum Gesamtwiderstand?

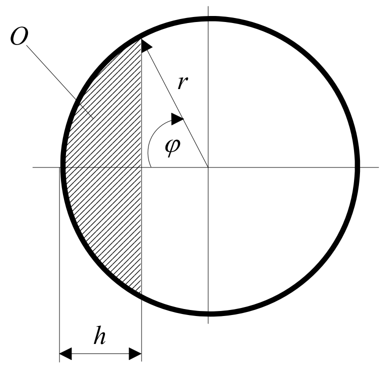
Den Reibungsbeiwert bei laminarer Grenzschicht können Sie über den Reibungsbeiwert einer ebenen Platte abschätzen. Ob die Fläche eben oder gewölbt ist, wirkt sich auf den Reibungsbeiwert kaum aus. Relevant ist lediglich, ob die Strömung anliegt oder sich bereits abgelöst hat.

Für den dimensionslosen Beiwerts der Reibung für eine eben Platte bei laminarer Grenzschicht gilt

$$c_R = \frac{1{,}328}{\sqrt{Re_{l_{ref}}}} = \frac{1{,}328}{\sqrt{2{,}3 \cdot 10^{5}}} = 2{,}769 \cdot 10^{-3}$$

Laminare Grenzschicht

Die Reibung ist lediglich für den Bereich der bespülten Oberfläche *O* zu berücksichtigen.



Da die laminare Strömung bei $\varphi = 70°$ ablöst, ergibt sich für die bespülte Oberfläche *O*

$$O = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot r^{2} \cdot (1 - cos\varphi) = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{0{,}043}{2}\right)^{2} \cdot (1 - cos70°) = 1{,}91 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^{2}$$

Damit ergibt sich für den Reibungswiderstand W_{R} der Kugel mit einer laminaren Grenzschicht

$$W_{\mathrm{R_{laminar}}} = c_{\mathrm{R}} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c_{\infty}{}^{2} \cdot O = 2{,}769 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1{,}225}{2} \cdot 80^{2} \cdot 1{,}91 \cdot 10^{-3} = 0{,}021\ \mathrm{N}$$

Bei einer Kugel setzt sich der Gesamtwiderstand W_{ges} aus dem Reibungswiderstand W_{R} und dem Druckwiderstand W_{D} zusammen. Also gilt für den Druckwiderstand

$$W_{\mathrm{D}} = W_{\mathrm{ges}} - W_{\mathrm{R_{laminar}}} = 2{,}28 - 0{,}021 = 2{,}259\ \mathrm{N}$$

Bei einer laminaren Grenzschicht trägt der Druckwiderstand also ungefähr 99% zum Gesamtwiderstand bei, der Reibungswiderstand lediglich 1 %.

Turbulente Grenzschicht

Der Reibungsbeiwert der ebenen Platte bei vollständig turbulenter Grenzschicht und $Re < 10^7$ ergibt sich zu

$$c_{\mathrm{R}} = \frac{0{,}074}{\sqrt[5]{Re_{l_{ref}}}} = \frac{0{,}074}{\sqrt[5]{2{,}3 \cdot 10^5}} = 6{,}264 \cdot 10^{-3}$$

Bei einem Ablösewinkel von φ = 120° bei turbulenter Grenzschicht ergibt sich die benetzte Oberfläche zu

$$O = 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot (1 - cos\varphi)$$

$$O = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{0{,}043}{2}\right)^2 \cdot (1 - cos120°) = 4{,}357 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^2$$

Damit ergibt sich für den Reibungswiderstand W_{R} der Kugel mit einer turbulenten Grenzschicht

$$W_{\mathrm{R_{turbulent}}} = c_{\mathrm{R}} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c_{\infty}{}^2 \cdot O = 6{,}264 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1{,}225}{2} \cdot 80^2 \cdot 4{,}357 \cdot 10^{-3} = 0{,}107\ \mathrm{N}$$

Also gilt nun für den Druckwiderstand

$$W_{\mathrm{D}} = W_{\mathrm{ges}} - W_{\mathrm{R_{turbulent}}} = 0{,}57 - 0{,}107 = 0{,}463\ \mathrm{N}$$

Bei einer turbulenten Grenzschicht trägt der Druckwiderstand also ungefähr 80% zum Gesamtwiderstand bei, der Reibungswiderstand immerhin ungefähr 20%. Trotzdem ist der Gesamtwiderstand der Kugel bei turbulenter Grenzschicht (Golfball) deutlich niedriger als bei laminarer Grenzschicht. In diesem Fall beträgt er lediglich 25% des Widerstands im Vergleich zur glatt polierten Kugel.

Übung 5-2

Sie betrachten am Nachthimmel eine Wolke, die in einer geschätzten Höhe von h = 5 km schwebt. Dabei treffen Sie folgende Annahmen:

Die auskondensierten Wassertropfen haben näherungsweise eine Kugelform mit einem Durchmesser von d = 10 µm. Die Dichte des Wassers beträgt $\rho = 10^3$ kg/m³, die kinematische Viskosität von Luft beträgt $\nu = 15 \cdot 10^{-6}$ m²/s.

Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der sich die Wolke absenkt.

Berechnung der Absinkgeschwindigkeit einer Wolke aus h = 5 km.

Annahmen:

Tröpfchendurchmesser d = 10 µm, Wasserdichte $\rho = 10^3$ kg/m³, kinematische Viskosität von Luft $\nu = 15 \cdot 10^{-6}$ m²/s. Aus dem Modell der Normatmosphäre bestimmen Sie die Temperatur und die Luftdichte in h = 5 km zu

$$T_{\mathrm{h}} = T_{\mathrm{A}} + \gamma \cdot (h - h_{\mathrm{A}}) = 288{,}15 - 6{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot (5000 - 0) = 255{,}65\ \mathrm{K}$$

$$\rho_\mathrm{h} = \rho_\mathrm{A} \cdot \left(\frac{T_\mathrm{h}}{T_\mathrm{A}}\right)^{-\left(\frac{g_0}{\gamma \cdot R}+1\right)} = 1{,}225 \cdot \left(\frac{255{,}65}{288{,}15}\right)^{-\left(\frac{9{,}81}{-6{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 287{,}05}+1\right)} = 0{,}736\ kg/m^3$$

Für eine konstante Absinkgeschwindigkeit ist die Beschleunigung gleich null, somit gilt

$$m \cdot \ddot{x} = 0$$

Aerodynamischer Widerstand und Gewichtskraft müssen sich also im Gleichgewicht befinden, das heißt

$$W = F_\mathrm{G}$$

also

$$C_\mathrm{W} \cdot \frac{\rho_\mathrm{Luft}}{2} \cdot {c_\infty}^2 \cdot S_{ref} = m \cdot g$$

$$C_\mathrm{W} \cdot \frac{\rho_\mathrm{Luft}}{2} \cdot {c_\infty}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = \rho_{\mathrm{H_2O}} \cdot \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot d^3 \cdot g$$

Für die Reynolds-Zahl an dem kugelförmigen Tropfen gilt

$$Re_\mathrm{d} = \frac{c_\infty \cdot d}{\nu}$$

Den Widerstandsbeiwert berechnen Sie aufgrund der zu erwartenden kleinen Reynolds-Zahl mit Hilfe der Näherung nach Stokes

$$C_\mathrm{W} = \frac{24}{Re_\mathrm{d}} = \frac{24 \cdot \nu}{c_\infty \cdot d}$$

Eingesetzt in die Gleichgewichtsbedingung ergibt

$$\frac{24 \cdot \nu}{c_\infty \cdot d} \cdot \frac{\rho_\mathrm{Luft}}{2} \cdot {c_\infty}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = \rho_{\mathrm{H_2O}} \cdot \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot d^3 \cdot g$$

$$c_\infty = \frac{\rho_{\mathrm{H_2O}} \cdot g \cdot d^2}{\rho_\mathrm{Luft} \cdot 18 \cdot \nu} = \frac{10^3 \cdot 9{,}81 \cdot (10^{-5})^2}{0{,}736 \cdot 18 \cdot 15 \cdot 10^{-6}} = 0{,}0049\ \mathrm{m/s}$$

Die Absinkgeschwindigkeit der Wolke beträgt also ungefähr 5 mm/s. Bei einer Wolke, die sich in 5 km Höhe befindet ist das mit bloßem Auge nicht zu erkennen. Am nächsten Morgen, nach einer 12-stündigen Nacht, wäre die Wolke gerade einmal um 211 m gesunken. Auch diesen Höhenunterschied könnten Sie vom Boden aus mit bloßem Auge sicher nicht wahrnehmen.

Übung 5-3

Während eines Herbststurms unternehmen Sie einen Spaziergang an der frischen Luft um die Spätfolgen der letzten Feier zu neutralisieren. Dabei fällt Ihnen ein kleiner Kamin auf dem Dach einer Bäckerei auf, der sich infolge der Windbelastung bedenklich zur Seite neigt. Sie fragen sich, welche Kraft auf den Kamin infolge des Sturms wohl wirkt.

Dabei treffen Sie folgende Annahmen:

Windgeschwindigkeit: $c_\infty = 65$ km/h

Kamindurchmesser: $d = 0{,}25$ m

Kaminhöhe: $h = 8$ m

Lufttemperatur: $T = 20$ °C

Luftdruck: $p = 1020$ hPa

1. Bestimmung des dimensionslosen Beiwerts des Widerstands für den Kamin

Zur Berechnung der Reynolds-benötigen Sie noch die kinematische Viskosität der Luft oder die dynamische Viskosität zusammen mit der Luftdichte.

Dynamische Viskosität: (Sutherlandformel):

$$\mu = 1{,}458 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{T^{1{,}5}}{T + 110{,}4} = 1{,}458 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{(20 + 273{,}15)^{1{,}5}}{(20 + 273{,}15) + 110{,}4} = 1{,}8134 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{Pa \cdot s}$$

Luftdichte (Zustandsgleichung des idealen Gases):

$$\rho = \frac{p}{R \cdot T} = \frac{1020 \cdot 100}{287{,}05 \cdot (20 + 273{,}15)} = 1{,}212\ \mathrm{kg/m^3}$$

Kinematische Viskosität:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{1{,}8134 \cdot 10^{-5}}{1{,}212} = 1{,}496 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^2/s}$$

Reynolds-Zahl:

$$Re_\mathrm{d} = \frac{c_\infty \cdot d}{\nu} = \frac{\frac{65}{3{,}6} \cdot 0{,}25}{1{,}496 \cdot 10^{-5}} = 3{,}02 \cdot 10^5$$

Aus dem Diagramm lesen Sie für diese Reynolds-Zahl mit Ihrem geübten Auge den C_W-Wert von ungefähr 1,0 ab. Dieser Wert gilt jedoch für den unendlich langen Zylinder. Mit einem Höhen zu Durchmesser-Verhältnis von $h/d = 8/0{,}25 = 32$ ergibt sich ein Korrekturfaktor von $K = 0{,}8$. Somit gilt für den dimensionslosen Beiwert es Widerstands für den Kamin

$$C_\mathrm{W}\left(\frac{h}{d} = 32\right) = K \cdot C_\mathrm{W}\left(\frac{h}{d} = \infty\right) = 0{,}8 \cdot 1{,}0 = 0{,}8$$

2. Windlast auf den Kamin

$$W = C_W \cdot \frac{\rho}{2} \cdot {c_\infty}^2 \cdot S_{ref} = C_W \cdot \frac{\rho}{2} \cdot {c_\infty}^2 \cdot d \cdot h = 0{,}8 \cdot \frac{1{,}212}{2} \cdot \left(\frac{65}{3{,}6}\right)^2 \cdot 0{,}25 \cdot 8 = 316\ N$$