

<b>6 Drallsatz .....</b>	<b>2</b>
6.1 Drallerhaltung bzw. Drehimpulserhaltung.....	2
6.1 Anwendung des Drallsatzes auf Strömungsmaschinen .....	17
6.2 Übungen zum Drallsatz Bsp. Laufrad einer Kreiselpumpe .....	24

## 6 Drallsatz

### 6.1 Drallerhaltung bzw. Drehimpulserhaltung

Linearer Impuls  $\vec{I}$  eines Massepunktes ist definiert durch seine Masse und seine Geschwindigkeit  $\vec{c}$

$$\vec{I} = m \cdot \vec{c}$$

Für diese punktförmige Masse  $m$  ergibt sich mit dem Ortsvektor  $\vec{r}$  der *Drall* oder *Drehimpuls*  $\vec{L}$

$$\vec{L} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{c}) = \vec{r} \times \vec{I}$$

Der Drehimpuls hängt immer davon ab, auf welchen Ursprung er bezogen wird

Analog zur zeitlichen Änderung des Impulses  $\vec{I}$

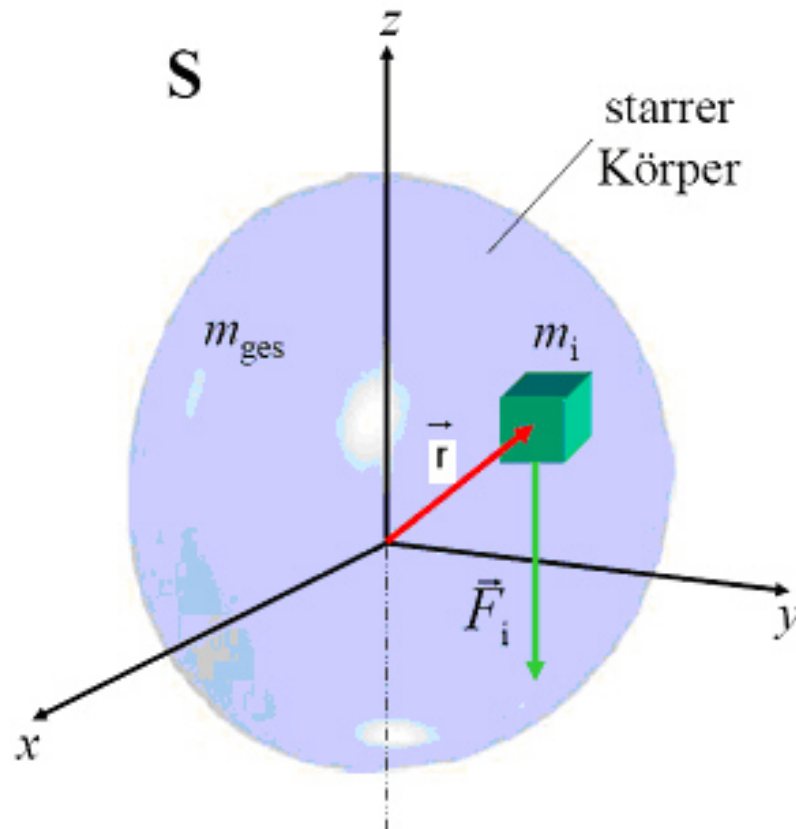
$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{I}}{dt}$$

ergibt sich für die zeitliche Änderung des Dralls  $\vec{L}$

$$\sum \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

d.h. die Summe aller auf die Masse wirkenden Momente bewirkt eine zeitliche Änderung des Dralls

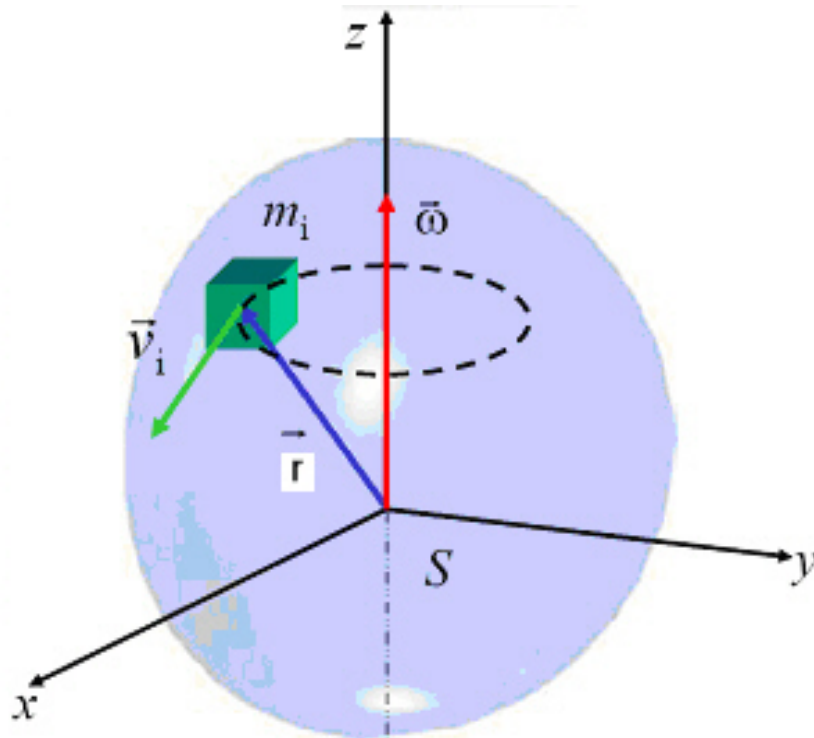
## Starrer Körper



Ein starrer Körper kann als ein System einzelner Massepunkte betrachtet werden, deren räumlicher Abstand zueinander zeitlich konstant bleibt

$$\vec{r}_i - \vec{r}_j = s_{ij} = \text{const.} \quad \text{und} \quad \frac{ds_{ij}}{dt} = 0$$

## Starrer Körper in Rotation



Beschreibung des Bewegungszustandes des starren Körpers im ruhenden Inertialsystem

Gesamtdrehimpuls des starren Körpers

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{I}_i$$

mit  $\vec{I} = m \cdot \vec{c}$  folgt

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{r}_i \times \vec{c}_i$$

Rotiert der Körper mit  $\vec{\omega}$  um eine feste Achse, so

gilt für die Geschwindigkeit  $\vec{c}_i$  des Massepunktes  $m_i$

$$\vec{c}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

## Gesamtdrehimpuls des starren Körpers

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{r}_i \times \vec{c}_i = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

Für eine Rotation um die  $z$ -Achse gilt bei einer symmetrischen Masseverteilung

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega \cdot y_i \\ \omega \cdot x_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\omega \cdot y_i \\ \omega \cdot x_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega \cdot x_i \cdot z_i \\ -\omega \cdot y_i \cdot z_i \\ \omega \cdot (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}$$

Mit dem senkrechten Abstand  $\vec{r}_{i,\perp}$  des Masselements  $m_i$  zur Drehachse gilt für den Drehimpuls

$$\vec{L} = \left( \sum_{i=1}^N m_i \cdot r_{i,\perp} \right) \cdot \vec{\omega}$$

## Massenträgheitsmoment des starren Körpers

Der Ausdruck

$$J = \sum_{i=1}^N m_i \cdot r_{i,\perp}^2$$

bezeichnet das Massenträgheitsmoment des starren Körpers um seine Drehachse

Der Drehimpuls lautet somit

$$\vec{L} = \underbrace{\left( \sum_{i=1}^N m_i \cdot r_{i,\perp}^2 \right)}_{\text{Trägheitsmoment } J} \cdot \vec{\omega} = J \cdot \vec{\omega}$$

Bei homogener Massenverteilung gilt für das Massenträgheitsmoment

$$J = \int_{(m)} r^2 \cdot dm = \rho \cdot \int_{(V)} r^2 \cdot dV$$

## Bewegungsgleichung des starren Körpers

Aus der Ableitung des Drehimpulses

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{I}$$

nach der Zeit folgt

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{r}} \times \vec{I} + \vec{r} \times \dot{\vec{I}}$$

wegen

$$\vec{I} = m \cdot \vec{c} = m \cdot \dot{\vec{r}} \Rightarrow \dot{\vec{r}} \parallel \vec{I}, \text{ d.h. Impuls- und Geschwindigkeitsvektor sind parallel}$$

gilt

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{I} = \vec{0}$$

und somit

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \vec{I}}_{=\vec{0}} + \vec{r} \times \dot{\vec{I}} = \vec{r} \times \dot{\vec{I}}$$

Wegen des 2. Newton'schen Axioms gilt

$$\vec{F} = \dot{\vec{I}}$$

und somit ergibt sich aus der zeitlichen Änderung des Drehimpulses ein Drehmoment

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \dot{\vec{I}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

bzw. ein Drehmoment bewirkt eine zeitliche Änderung des Drehimpulses

Analogie zwischen Impuls und Drehimpuls

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{F} \quad \text{und} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Aus der Beziehung  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$  folgt, daß der Gesamtdrehimpuls des Systems konstant bleibt, solange keine äußeren Momente auf das System wirken, d.h.

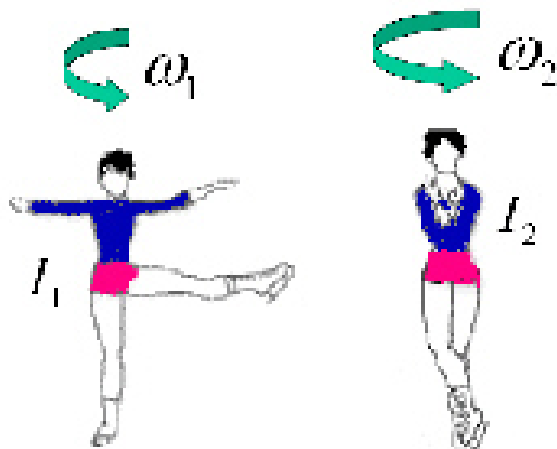
$$\vec{M} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \vec{L} = \text{const.}$$



Drehimpulserhaltung bedeutet, es gilt  $\vec{L} = \vec{J} \times \vec{\omega} = \text{const.}$

$\Rightarrow$  Veränderung des Trägheitsmoments  $J$  bewirkt somit eine Änderung der Drehgeschwindigkeit  $\omega$

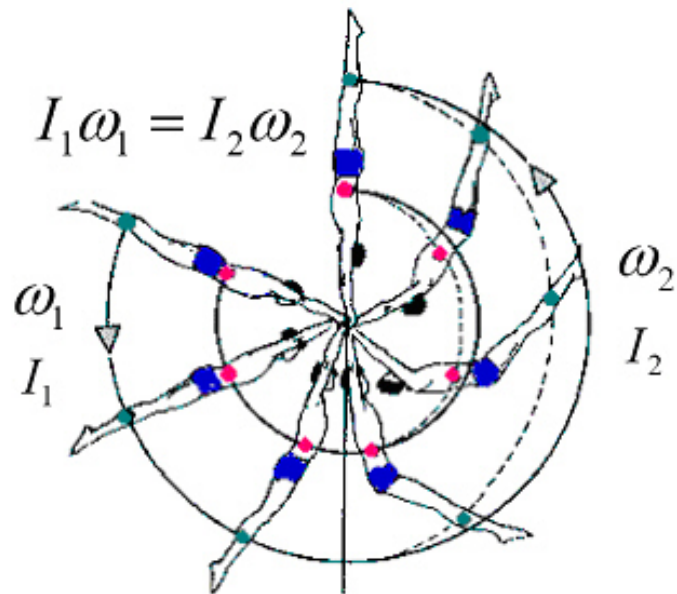
**Bsp.: Pirouetteneffekt**



$$J_1 \cdot \omega_1 = J_2 \cdot \omega_2 = \text{const.}$$

$$J_2 < J_1 \Rightarrow \omega_2 > \omega_1$$

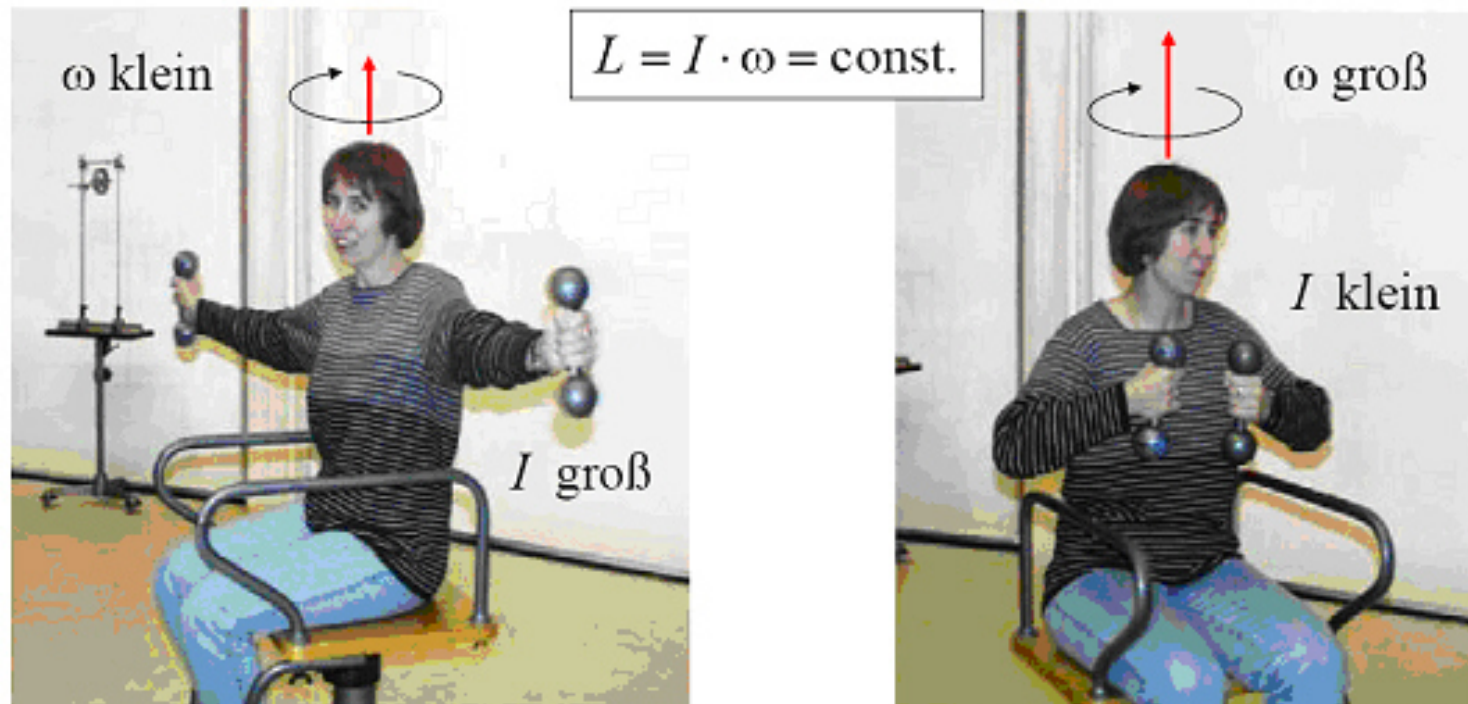
ice\_skater\_pirouette.mpeg

**Bsp.: Drehimpulserhaltung beim Reckturnen**

$$J_1 \cdot \omega_1 = J_2 \cdot \omega_2 = \text{const.}$$

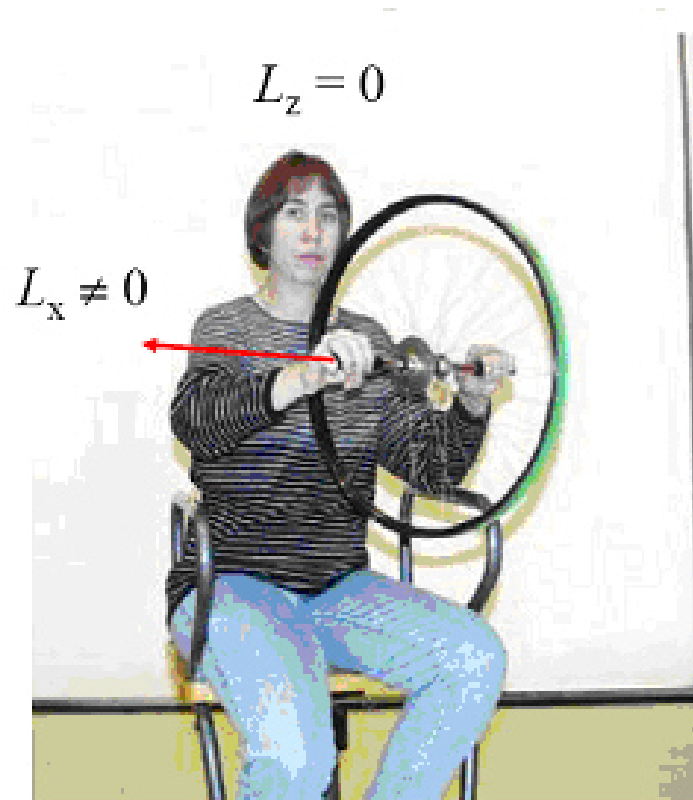
$$J_2 < J_1 \Rightarrow \omega_2 > \omega_1$$

## Versuch zur Drehimpulserhaltung

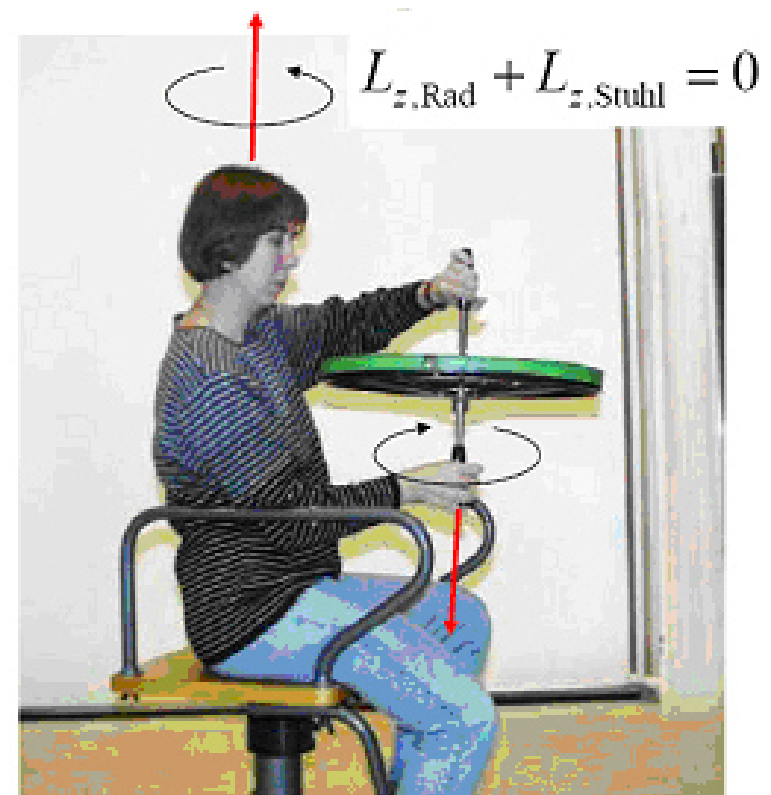


(Physikalisches Institut Universität Dortmund)

## Versuch zur Drehimpulserhaltung, Drehimpuls als Vektor



Horizontaler Drehimpuls durch rotierendes Schwungrad  $\Rightarrow$  Person bleibt in Ruhe



Drehung des Schwungrades in die Vertikale  $\Rightarrow$  Rotation der Person  
Gesamtdrehimpuls bleibt nach wie vor gleich Null

## Einfluß der Drehimpulserhaltung bei Wetterphänomenen – Tornado



## **Einfluß der Drehimpulserhaltung bei Wetterphänomenen - Tornado**

### **Voraussetzung**

Zusammentreffen trocken-kalter Luftmassen (aus Kanada) mit feucht-warmen Luftmassen (aus dem Golf von Mexiko) z.B. im Mittelwesten der USA

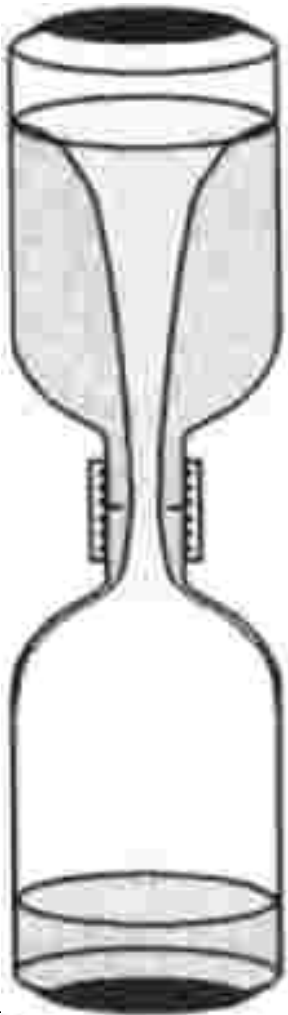
- ⇒ Kalte Luft schiebt sich trotz ihrer größeren Dichte über die warme Luftmasse
- ⇒ Bildung einer instabilen Schichtung mit großem Temperaturunterschied
- ⇒ Kondensation des Wasserdampfes, Wolkenbildung mit starkem Niederschlag
- ⇒ Freisetzen zusätzlicher Wärme infolge der Kondensation
- ⇒ Ausbildung einer nach oben gerichtete Luftbewegung

## Einfluß der Drehimpulserhaltung bei Wetterphänomenen - Tornado

Am Boden bildet die horizontal nachströmende Luft aufgrund der Corioliskraft einen Linkswirbel (Nordhalbkugel) mit einem Durchmesser von lediglich einigen 10 m

- ⇒ große Rotationsgeschwindigkeit im Wirbelkern aufgrund der Drehimpulserhaltung
- ⇒ Große Zentrifugalkraft bedingt hohen Unterdruck im Zentrum des Wirbels ( $\Delta p \approx 50-100 \text{ hPa}$ )
- ⇒ Kaltluft wird infolge des Unterdrucks und ihrer größeren Dichte als die unten liegende Warmluft nach unten gesaugt (ähnlich einem Abflußrohr)
- ⇒ Kondensation der feucht-warmen Luft um diesen Wirbel
- ⇒ Ausbildung des charakteristischen dunklen Rüssels des Tornados
- ⇒ Destruktive Wirkung infolge des starken Druckgefälles von 50–100 hPa und Windgeschwindigkeiten von bis zu 400 km/h

## Versuch zur Drehimpulserhaltung - Tornado in der Wasserflasche



Wasser in der oberen Flasche wird durch eine Anfangsbeschleunigung in eine Rotation mit einer Umfangsgeschwindigkeit  $c = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot r = \omega \cdot r$  versetzt

Aufgrund der Drehimpulserhaltung gilt

$$c_1 \cdot R = c_2 \cdot r \quad \Rightarrow \quad c_2 = c_1 \cdot \frac{R}{r} \quad \Rightarrow \quad f_2 = f_1 \cdot \frac{R^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad f_2 \propto \frac{1}{r^2}$$

d.h. Je mehr man sich dem Zentrum nähert, um so mehr nimmt die Umfangsgeschwindigkeit zu

Flasche:

$$R \approx 40 \text{ [mm]}$$

= Anfangsradius

$$r \approx 4 \text{ [mm]}$$

= Wirbelinnendurchmesser

$$f_1 \approx 1 \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

= Anfangsdrehfrequenz

$$\Rightarrow f_2 = f_1 \cdot 100 = 100 \text{ [s}^{-1}\text{]}$$



## 6.1 Anwendung des Drallsatzes auf Strömungsmaschinen

Für eine punktförmige Masse  $m$  ergibt sich mit dem Ortsvektor  $\vec{r}$  und dem Geschwindigkeitsvektor  $\vec{c}$  der *Drall*, *Drehimpuls* oder auch das *Impulsmoment*  $\vec{L}$

$$\vec{L} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{c}) = \vec{r} \times \vec{I}$$

Analog zur zeitlichen Änderung des Impulses  $\vec{I}$   $\Rightarrow$  Impulsstrom  $\dot{\vec{I}}$

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{I}}{dt} = \dot{\vec{I}}$$

ergibt sich für die zeitliche Änderung des Dralls  $\vec{L}$   $\Rightarrow$  Drallstrom  $\dot{\vec{L}}$

$$\sum \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}}$$

d.h. die Summe aller auf die Masse wirkenden Momente bewirkt eine zeitliche Änderung des Dralls

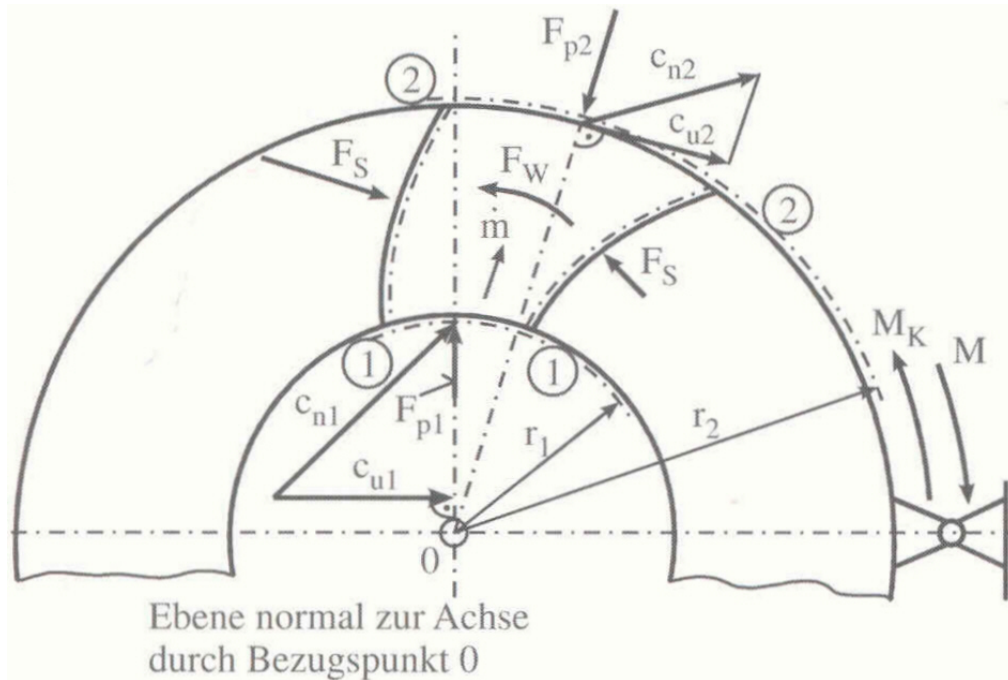
**Drallstrom  $\vec{\dot{L}}$** 

$$\vec{\dot{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{m} \cdot (\vec{r} \times \vec{c}) \quad \vec{\dot{L}}_2 - \vec{\dot{L}}_1 = \dot{m} \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{c}_2 - \vec{r}_1 \times \vec{c}_1) = \sum \vec{M}$$

d.h. Differenz zwischen aus- und eintretendem Drallstrom entspricht der Summer aller im Kontrollraum auf das Fluid wirkenden Momente

⇒ Drallstrom entspricht der Drehenergie der Fluidmasse um einen Bezugspunkt

Anwendung des Drallsatzes auf einen mit  $\dot{m}$  durchströmten Schaufelkanal



Summe aller Momente

$$\sum \vec{M} = \vec{M}_{A1} + \vec{M}_{A2} + \vec{M}_W + \vec{M}_S + \vec{M}_G$$

Moment infolge von

- $\vec{M}_{A1,2}$  Druckkräften im Ein- und Austritt
- $\vec{M}_W$  Wandkräften
- $\vec{M}_S$  Stützkräfte an Einbauten
- $\vec{M}_G$  Gewichtskräften

$c_n$  Projektion der Geschwindigkeit in die dargestellte Ebene

$c_u$  Umfangskomponente der Geschwindigkeit, senkrecht auf dem Radius  $r$

Gesucht werden die Drehmomente um eine Bezugsachse durch den Bezugspunkt  $O$ ,  
Beiträge werden hierzu lediglich von Geschwindigkeitskomponenten geliefert, die in einer Ebene  
normal zur Bezugsachse und senkrecht auf dem Radius stehen

$\Rightarrow c_u$  Umfangskomponente der Geschwindigkeit  $c$

Unter Vernachlässigung der Gewichtskraft und der Momente im Ein- und Austritt lautet das  
resultierende Moment zur Bezugsachse, welches auf das Fluid ausgeübt wird

$$\sum M = \underbrace{M_{A1}}_{=0} + \underbrace{M_{A2}}_{=0} + M_W + M_S + \underbrace{M_G}_{=0} = M_W + M_S = \dot{m} \cdot (r_2 \cdot c_{u2} - r_1 \cdot c_{u1}) = M$$

Reaktionsmoment des Fluids auf die körpergebundene Fläche der Stromröhre  $M_K$

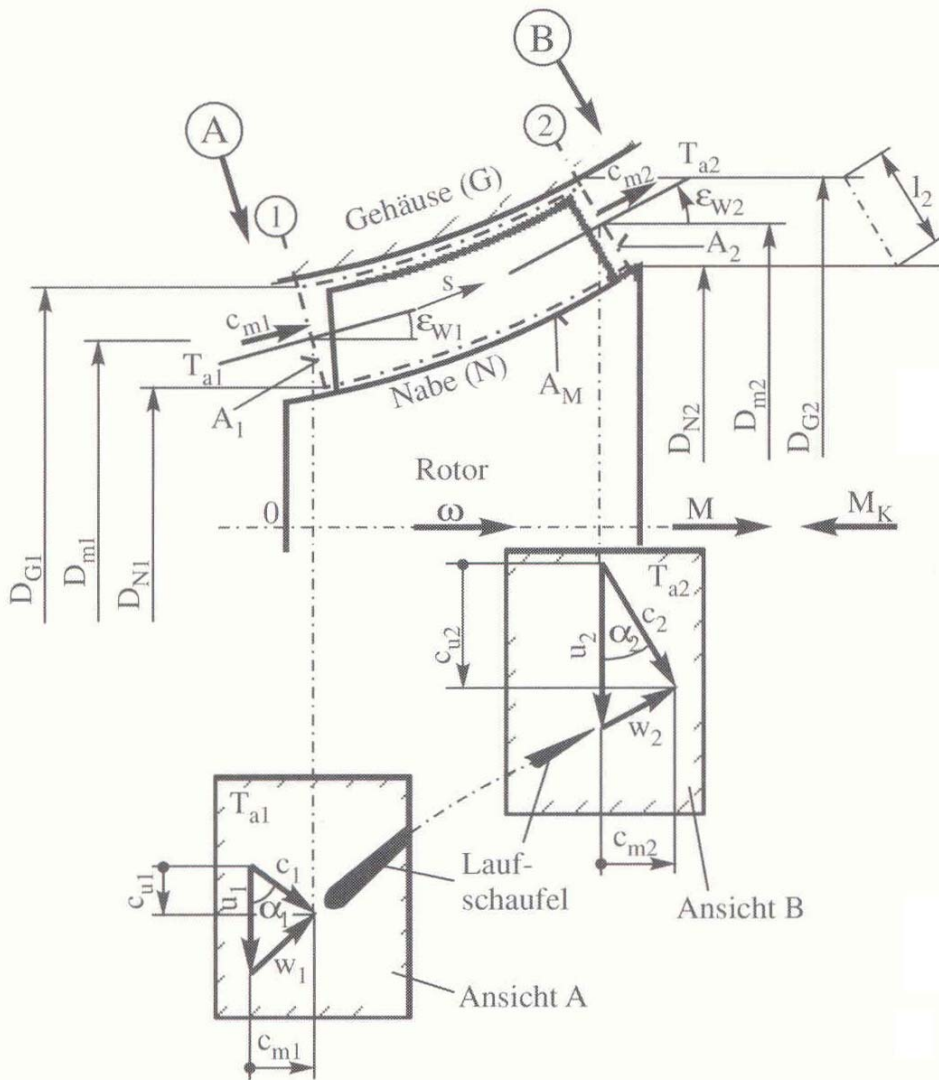
$$M_K = -M = -\dot{m} \cdot (r_2 \cdot c_{u2} - r_1 \cdot c_{u1})$$

**Reibungsfreie Strömung ( $M_W = 0$ ) ohne Einbauten ( $M_S = 0$ )**

$$M = 0 \Rightarrow -\dot{m} \cdot (r_2 \cdot c_{u2} - r_1 \cdot c_{u1}) = 0 \Rightarrow r_2 \cdot c_{u2} = r_1 \cdot c_{u1} \quad \text{bzw.} \quad c_{u2} = c_{u1} \cdot \frac{r_1}{r_2}$$

Gleichung des Potentialwirbels (Ringräume ohne Schaufeln, Behälter und Kanäle)

Anwendung des Drallsatzes auf das Laufrad einer Strömungsmaschine (z.B. Verdichter)



$A_{1,2}$  Ein- und Austrittsebene

$T_{a1,a2}$  Tangentialebenen zu  $A_{1,2}$

$c_{1,2}$  Absolutgeschwindigkeiten

$c_{u1,u2}$  Umfangsgeschwindigkeiten

$$c_{u1,u2} = c_{1,2} \cdot \cos \alpha_{1,2}$$

$w_{1,2}$  Relativgeschwindigkeiten

$c_{m1,m2}$  Gemittelte Geschwindigkeiten

$\epsilon_{w1,2}$  Neigungswinkel der Tangentialebenen

Axialmaschine  $\epsilon_{w1,2} \approx 0^\circ$

Radialmaschine  $\epsilon_{w1,2} \approx 90^\circ$

Für Radialmaschinen ( $\epsilon_{w1,2} \approx 90^\circ$ ) gilt

$$c_{n1} = c_1, \quad c_{n2} = c_2$$

**Moment auf das Fluid im Kontrollraum**

$$M = \dot{m} \cdot (r_{m2} \cdot c_{u2} - r_{m1} \cdot c_{u1})$$

**Übertragene Leistung  $P_{12}$  vom Laufrad auf das Fluid**

Mit dem mittleren Radius  $r_m$  der Stromfläche

$$r_m = \frac{D_m}{2} \quad \text{und} \quad D_m = \sqrt{\frac{D_G^2 + D_N^2}{2}}$$

und der Umfangsgeschwindigkeit  $u$  und der Drehzahl  $n$

$$u = r \cdot \omega = D \cdot \pi \cdot n \quad \text{bzw.} \quad u_m = r_m \cdot \omega = D_m \cdot \pi \cdot n$$

ergibt sich für die auf das mit  $\omega$  rotierende Laufrad übertragene Leistung  $P_{12}$

$$P_{12} = M \cdot \omega = \dot{m} \cdot (r_{m2} \cdot c_{u2} - r_{m1} \cdot c_{u1}) \cdot \omega$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{12} = \dot{m} \cdot (u_{m2} \cdot c_{u2} - u_{m1} \cdot c_{u1})}$$

**Spezifische technische Arbeit  $w_{t12}$** 

Leistung bezogen auf den Massestrom ergibt spezifische technische Arbeit  $w_{t12}$

$$\frac{P_{12}}{\dot{m}} = w_{t12} = (u_{m2} \cdot c_{u2} - u_{m1} \cdot c_{u1})$$

**Momente, die von feststehenden Leiträdern auf das Fluid ausgeübt werden**

Ersetzen der Umfangsgeschwindigkeiten  $c_{u1,u2}$  durch die Absolutgeschwindigkeiten  $c_{1,2}$  am Ein- und Austritt des Leitrades

Leitrad steht fest, d.h.  $\omega = 0$ , d.h. an den Leiträdern wird keine Leistung mit dem Fluid ausgetauscht

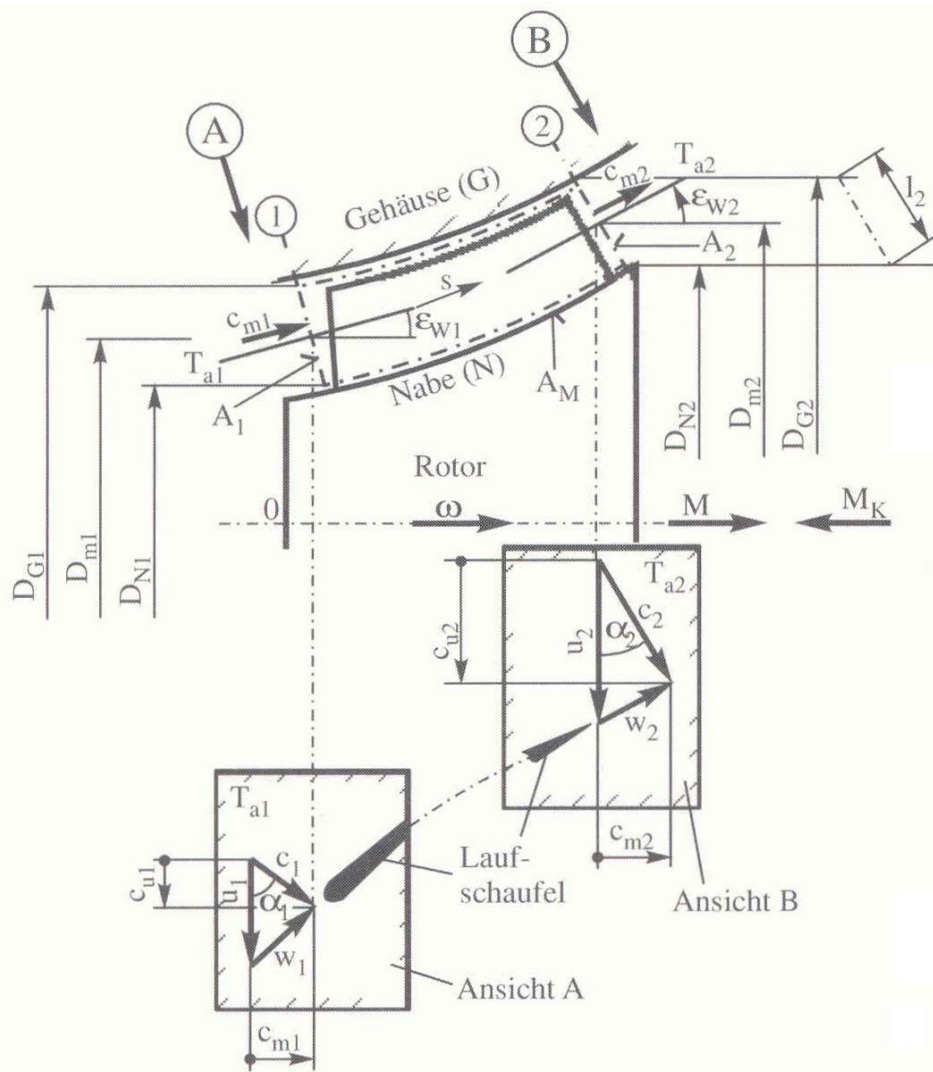
$$\Rightarrow \frac{P_{12}}{\dot{m}} = w_{t12} = 0$$

$$\boxed{M = \dot{m} \cdot (r_{m2} \cdot c_2 - r_{m1} \cdot c_1)}$$

Leitrad nimmt das Reaktionsmoment  $M_K = -M$  auf

### 6.2 Übungen zum Drallsatz

### Bsp. Laufrad einer Kreiselpumpe



$$c_1 = 10.15 [m/s]$$

$$c_2 = 26.05 [m/s]$$

$$\alpha_1 = 80 [^\circ]$$

Winkel zu  $c_{u1}$

$$\alpha_2 = 22.6 [^\circ]$$

Winkel zu  $c_{u2}$

$$n = 2950 [min^{-1}]$$

$$D_{N1} = 70 [mm]$$

$$D_{G1} = 90 [mm]$$

$$D_{N2} = 174 [mm]$$

$$D_{G2} = 180 [mm]$$

$$\dot{m} = 24.98 [kg/s]$$



**Bsp. Laufrad einer Kreiselpumpe****ges.:**

- (1) Drehmoment  $M$  und innere Leistungsübertragung  $P_{12}$  vom Rotor auf das Fluid
- (2) Spezifische technische Arbeit  $w_{t12}$  und geleistete spezifische Strömungsarbeit  $y_t$  am Fluid bei einem Gesamtwirkungsgrad von  $\eta_t = 0.7$