Ü 10.1 Linienintegral

geg.: Vektorfeld $\vec{v} = \vec{v}(x,y,z) = \vec{v}(X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z))$ und eine Raumkurve $C : \vec{r} = \vec{r}(t)$ mit $a < t < b$ im Definitionsbereich von $\vec{v}$.
Das Linienintegral von $\vec{v}$ längs der Kurve C ist das bestimmte Integral

$$^{C}\int \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \cdot dt$$

Mit

$$\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$$

gilt im Vektorfeld $\vec{v}$:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

Berechnung des Linienintegrals durch Integration des inneren Produkts aus $\vec{v}$ und $\vec{r}$ von $t = a$ bis $t = b$

Beispiel zur Berechnung eines Linienintegrals

geg.: Vektorfeld $\vec{v} = \vec{v}(x,y,z) = \vec{v}(2y+3, xz, yz-x)$

Man berechne das Linienintegral $^{C}\int \vec{v} \cdot d\vec{r}$ längs der Kurve $C : \vec{r} = (2t^2, t, t^3)$, $0 \le t \le 1$

Im Vektorfeld ist zu setzen:

$$x = 2t^2, y = t, z = t^3$$

$\Rightarrow$

$$\vec{v}(\vec{r}(t)) = (2t+3, 2t^5, t^4 - 2t^2)$$

mit

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (4t, 1, 3t^2)$$

folgt

$$\vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}} = (8t^2 + 12t + 2t^5 + 3t^6 - 6t^4)$$

$$^{C}\int \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \cdot dt = \int_{t=0}^{t=1} (8t^2 + 12t + 2t^5 + 3t^6 - 6t^4)dt = \frac{288}{35} \approx 8.22$$