Thermodynamik

Prof. Dr.-Ing. Peter Hakenesch

peter.hakenesch@hm.edu

www.lrz-muenchen.de/~hakenesch

5 Kinetische Gastheorie

5.1 Druck als Ergebnis von Stoßvorgängen

Klassische Thermodynamik

Erkenntnisse beruhen auf experimenteller Untersuchung thermodynamischer Prozesse

Kinetische Gastheorie

⇒ Teil der statistischen Thermodynamik

⇒ Betrachtung der mikroskopischen Struktur der gasförmigen Materie

⇒ Beschreibung der Stoffeigenschaften und Gesetzmäßigkeiten erfolgt auf Basis der klassischen Mechanik und Statistik

Annahmen der kinetischen Gastheorie

- Atome und Moleküle werden durch Massepunkte repräsentiert, die sich in einer permanenten, ungeordneten Bewegung befinden
- Massepunkte bewegen sich auf geradlinigen Bahnen mit gleichförmiger Geschwindigkeit
- Stoßvorgänge zwischen einzelnen Teilchen oder mit einer Wand, entsprechen elastischen Stößen
- Anziehungskräfte zwischen den Teilchen sind aufgrund der (angenommenen) geringen Dichte vernachlässigbar

Kenntnis der mikroskopischen Daten eines Systems, d.h.

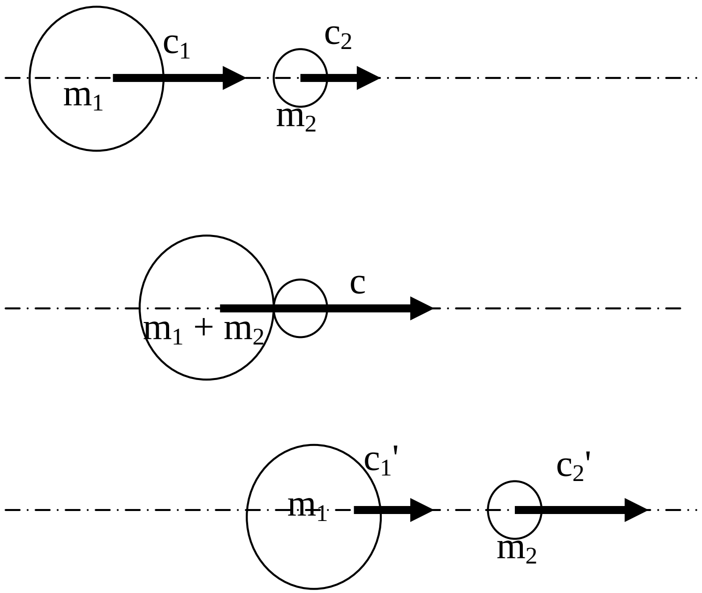
- Anzahl der im Volumen enthaltenen Teilchen
- Teilchenmasse
- Geschwindigkeit

$\Rightarrow$ Berechnung der makroskopischen Größen, wie z.B. Druck, Volumen und Temperatur

Impuls und Stoß

Elastischer Stoß

Körper bewegen sich während einer kurzen Berührungsphase mit einer gemeinsamen Geschwindigkeit c, stoßen sich wieder ab und bewegen sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten c_1' und c_2' weiter



Elastischer Stoß

Impulssatz

$$m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2 = m_1 \cdot c_1' + m_2 \cdot c_2'$$

$$m_1 \cdot \left(c_1 - c_1' \right) = m_2 \cdot \left(c_2 - c_2' \right)$$

Körper erfahren keine bleibenden Verformungen, Summe der Bewegungsenergie vor und nach dem elastischen Stoß bleibt gleich d.h. $E_{kin} = E_{kin}'$.

Energiesatz

$$\frac{m_1 \cdot c_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot c_2^2}{2} = \frac{m_1 \cdot c_1'^2}{2} + \frac{m_2 \cdot c_2'^2}{2}$$

Einsetzen in den Impulssatz ergibt die Geschwindigkeiten nach dem elastischen Stoß

$$c_1' = \frac{(m_1 - m_2) \cdot c_1 + 2 \cdot m_2 \cdot c_2}{m_1 + m_2}$$

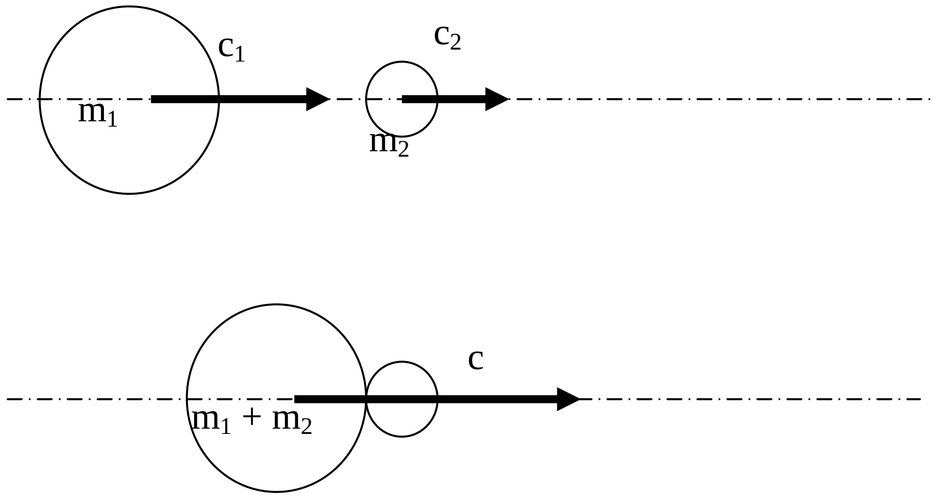
$$c_2' = \frac{(m_1 - m_2) \cdot c_2 + 2 \cdot m_1 \cdot c_1}{m_1 + m_2}$$

Unelastischer Stoß

Die am Stoßvorgang beteiligten Körper sind unelastisch

$\Rightarrow$ Verformung an den Berührungsstellen

$\Rightarrow$ Körper bewegen sich mit gemeinsamer Geschwindigkeit c weiter



Unelastischer Stoß

Geschwindigkeit *c* nach dem Stoß aus Impuls- und Energiesatz

$$m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2 = (m_1 + m_2) \cdot c$$

$$c = \frac{m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2}{m_1 + m_2}$$

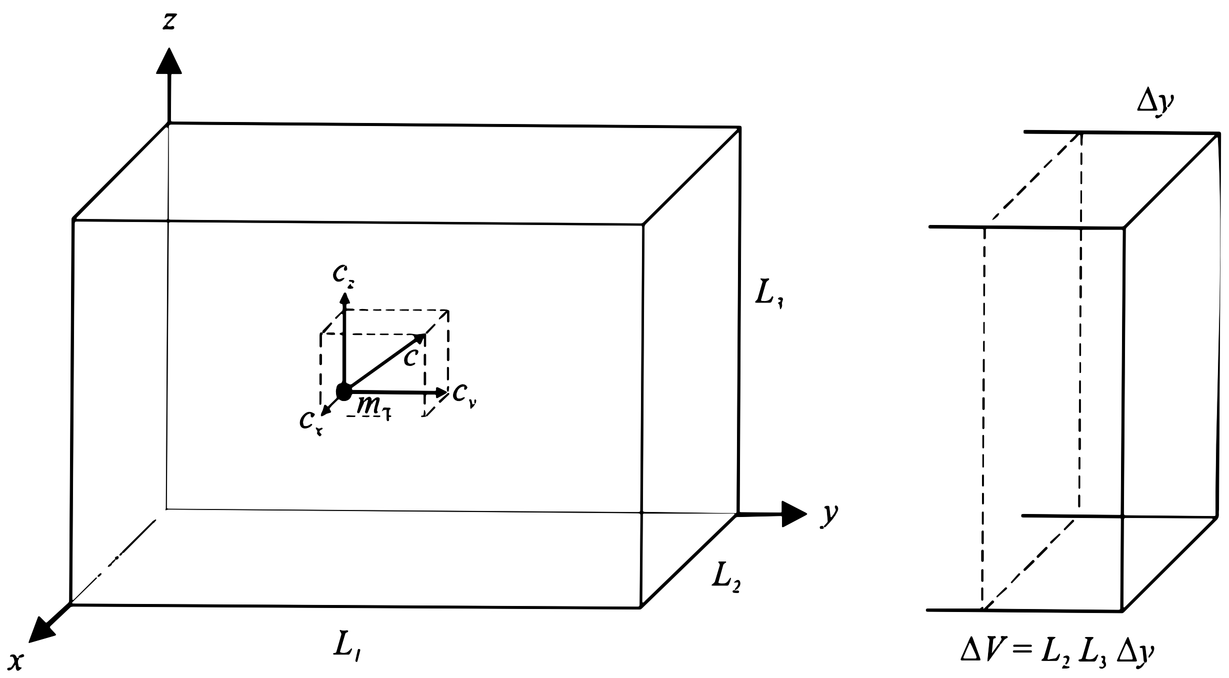
Geleistete Verformungsarbeit ΔW ergibt sich aus der Differenz der Bewegungsenergien W_1 und W_2 vor und nach dem Stoß:

$$W_1 = \frac{m_1 \cdot c_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2 \cdot c_2^{\,2}}{2}$$

$$W_2 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot c^2}{2}$$

$$\Delta W = W_1 - W_2 = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot (c_1 - c_2)^2}{2 \cdot (m_1 + m_2)}$$

Kontrollvolumen



Innerhalb des Quaders befinden sich N Gasteilchen mit der Masse m_T.

Betrachtung eines Teilchens i, $1 \leq i \leq N$

Impuls I dieses Teilchens beträgt

$$\boldsymbol{I = m_T \cdot c}$$

Beim elastischen Aufprall auf die Wand ändert sich die y-Komponente des Impulses

$$m_T \cdot c_{y,i} \rightarrow m_T \cdot \left(-c_{y,i}\right)$$

d.h.

$$\Delta I_{y,i} = I_{y,i}\left(t + \Delta t\right) - I_{y,i}\left(t\right) = m_T \cdot \left(-c_{y,i}\right) - m_T \cdot c_{y,i} = -2 \cdot m_T \cdot c_{y,i}$$

Differenzierung des Impulses nach der Zeit ergibt Kraft auf die Wand

$$F = \frac{\partial I}{\partial t} \Rightarrow F_{T,i} = \frac{\Delta I_{y,i}}{\Delta t} = \frac{2 \cdot m_T}{\Delta t} \cdot c_{y,i}$$

Betrag der auf die rechte Wand übertragenen Kraft F ergibt sich aus der Summation der Impulsänderungen aller Gasteilchen ΔN, die im Zeitintervall Δt auf die rechte Wand auftreffen

$$F = \sum_{i=1}^{\Delta N} F_i = \frac{2 \cdot m_T}{\Delta t} \cdot \sum_{i=1}^{\Delta N} c_{y,i}$$

Mit der mittleren Geschwindigkeit $\sqrt{\left\langle {c_y}^2 \right\rangle}$ der Teilchen in y-Richtung ergibt sich für die Kraft F

$$F = \Delta N \cdot \frac{2 \cdot m_T}{\Delta t} \cdot \sqrt{\left\langle {c_y}^2 \right\rangle}$$

Im Zeitintervall Δt können nur so viele Teilchen ΔN auf die Wand treffen, die sich im Abstand

$$\Delta y = \sqrt{\left\langle {c_y}^2 \right\rangle} \cdot \Delta t$$

von der Wand befinden, also in der Volumenscheibe ΔV

$$\Delta V = \Delta y \cdot A = \sqrt{\left\langle {c_y}^2 \right\rangle} \cdot \Delta t \cdot A$$

Anzahl der Teilchen $N_{\Delta V}$ in der Volumenscheibe ΔV

$$N_{\Delta V} = \frac{N}{V} \cdot \Delta V = \frac{N}{V} \cdot \sqrt{\left\langle {c_y}^2 \right\rangle} \cdot \Delta t \cdot A$$

Statistisch bewegen sich im Zeitintervall Δt gleich viele Teile nach rechts, wie nach links

$\Rightarrow$ Anzahl der Teilchen, die sich im Zeitintervall Δt auf die rechte Wand zu bewegen, entspricht der Hälfte der Teilchen, die sich in der Volumenscheibe ΔV befindet

$$\Delta N = \frac{1}{2} \cdot N_{\Delta V} = \frac{1}{2} \cdot \frac{N}{V} \cdot \sqrt{\left\langle {c_y}^2 \right\rangle} \cdot \Delta t \cdot A$$

Einsetzen von ΔN in die Gleichung für die Druckkraft ergibt

$$F = \Delta N \cdot \frac{2 \cdot m_T}{\Delta t} \cdot \sqrt{\left\langle {c_y}^2 \right\rangle} \Rightarrow F = \frac{N}{V} \cdot m_T \cdot \left\langle {c_y}^2 \right\rangle \cdot A$$

Druck auf die Wandfläche A

$$p = \frac{F}{A} = \frac{N}{V} \cdot m_T \cdot \left\langle {c_y}^2 \right\rangle$$

Bewegung der Teilchen erfolgt mit gleicher Wahrscheinlichkeit in alle Richtungen

$$\left\langle {c_x}^2 \right\rangle = \left\langle {c_y}^2 \right\rangle = \left\langle {c_z}^2 \right\rangle$$

$$\left\langle c^2 \right\rangle = \left\langle {c_x}^2 \right\rangle + \left\langle {c_y}^2 \right\rangle + \left\langle {c_z}^2 \right\rangle$$

$\Rightarrow$ Definition einer mittleren Geschwindigkeit, die ***mittlere thermische Geschwindigkeit***

$$\bar{c} = \sqrt{\left\langle {c_x}^2 \right\rangle + \left\langle {c_y}^2 \right\rangle + \left\langle {c_z}^2 \right\rangle}$$

mit

$$c_y^2 = \frac{1}{3} \cdot \left\langle c^2 \right\rangle$$

folgt für den Druck

$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{N}{V} \cdot m_T \cdot \bar{c}^{\,2}$$

$\Rightarrow$ Druck = Folge von Stoßvorgängen der Gasmoleküle auf die Behälterwand

5.2 Temperatur als Maß der kinetischen Energie

Die Gleichung für den Druck läßt sich auch schreiben als

$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{N}{V} \cdot m_T \cdot \overline{c}^2 \quad \Rightarrow \quad p \cdot V = \frac{2}{3} \cdot N \cdot \frac{1}{2} \cdot m_T \cdot \overline{c}^2$$

mit der mittleren kinetischen Energie eines Teilchen

$$\overline{E}_T = \frac{1}{2} \cdot m_T \cdot \overline{c}^2$$

folgt

$$p \cdot V = \frac{2}{3} \cdot N \cdot \overline{E}_T$$

Vergleich mit der thermischen Zustandsgleichung des idealen Gases

$$p \cdot V = m \cdot R \cdot T = N \cdot m_T \cdot R \cdot T$$

$\Rightarrow$ mittlere kinetische Energie eines Gasteilchens ist proportional der thermodynamischen Temperatur T des Gases

$$\overline{E}_T = \frac{3}{2} \cdot m_T \cdot R \cdot T$$

Gesamte kinetische Energie aller N Teilchen, die sich im Volumen V befinden berechnet sich mit

$$m = N \cdot m_T$$

zu

$$\sum_{i=1}^{N} \overline{E}_T = \frac{3}{2} \cdot m \cdot R \cdot T$$

Absolute Temperatur T stellt somit ein Maß für die innere Energie der Gasmasse dar

Ersetzen der Masse m durch das Produkt aus Teilchenanzahl n und Molmasse M

$$m = n \cdot M$$

und der stoffspezifischen Gaskonstante R durch die universelle Gaskonstante R_m

$$R = \frac{R_m}{M}$$

ergibt gesamte kinetische Energie des Systems

$$\sum_{i=1}^{N} \overline{E}_T = \frac{3}{2} \cdot n \cdot R_m \cdot T$$

$\Rightarrow$ Die kinetische Energie eines Systems ist ausschließlich eine Funktion von Temperatur und Anzahl der Teilchen, jedoch unabhängig von der Teilchenmasse

Ü 5.1: Mittlere thermische Geschwindigkeit eines Luftmoleküls

ISA-Standardbedingungen:

T = 288.15 [K] (=15°C)

R_{Luft} = 287.1 [J/kg·K]