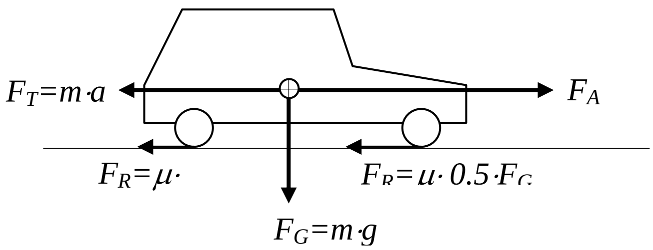
Ü 6.1 Beschleunigung eines Fahrzeugs

Ein Fahrzeug mit einer Masse m = 1750 kg wird t = 6.9 s lang mit a = 0.38 g beschleunigt. Der Rollwiderstand wird mit μ = 0.014 abgeschätzt, der aerodynamische Widerstand wird vernachlässigt.
Welche Arbeit wird von der Antriebskraft in dem Zeitintervall Δt = 6.9 s geleistet?



Gewichtskraft F_G des Fahrzeugs

$$F_G = m \cdot g = 1750\,kg \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} = 17168\,N$$

Antriebskraft F_A aus der Kräftebilanz in Fahrtrichtung

$$F_A = m \cdot a + \mu \cdot F_G = 1750\,kg \cdot 0.38 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} + 0.014 \cdot 17168 N = 6764 N$$

Im Zeitintervall Δt zurückgelegte Strecke

$$\Delta s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.38 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 6.9^2\; s^2 = 88.74 m$$

Verrichtete Arbeit

$$W_A = F_A \cdot \Delta s = 6764 N \cdot 88.74 m = 600.2 \cdot 10^3\, Nm = 0.1667\, kWh$$

Ü 6.2 Isotherme Kompression von Luft

Ein reibungsfrei gleitender Kolben mit einem Durchmesser von d = 100mm verdichtet Luft isotherm vom Volumen V_1 = 0.18 m³ auf V_2 = 0.03 m³. Der Anfangsdruck beträgt p_1 = 1340 hPa. Der Umgebungsdruck beträgt p_u = 980hPa.

Gesucht sind die erforderliche Kolbenkraft F_N und die verrichtete Nutzarbeit W_{N12}.

$$W_{N12} = W_{V12} - p_U \cdot (V_1 - V_2)$$

Die Volumenänderungsarbeit ergibt sich zu

$$W_{V12} = -\int_1^2 p \cdot dV$$

mit der Zustandsgleichung des idealen Gases bei isothermen (d.h. dT = 0) Prozessen

$$p \cdot V = m \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad p \cdot V = p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$$

$$\Leftrightarrow \; p = p_1 \cdot V_1 \cdot \frac{1}{V}$$

folgt

$$W_{V12} = -\int_1^2 \frac{R \cdot T}{V} \cdot dV = -p_1 \cdot V_1 \cdot \int_1^2 \frac{1}{V} \cdot dV = -p_1 \cdot V_1 \cdot \left[\ln(V_2) - \ln(V_1)\right] = -p_1 \cdot V_1 \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

und die Nutzarbeit W_{N12} zu

$$W_{N12} = -p_1 \cdot V_1 \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) - p_U \cdot (V_1 - V_2)$$

$$W_{N12} = -134000\,Pa \cdot 0.18\,m^3 \cdot \ln\left(\frac{0.03}{0.18}\right) - 98000\,Pa \cdot (0.18 - 0.03) = 28517\,J$$

Kolbenkraft F_N

$$p_2 = \frac{p_1 \cdot V_1}{V_2}$$

$$p_2 = \frac{134000\,Pa \cdot 0.18\,m^3}{0.03\,m^3} = 804000\,Pa$$

$$F_N = (p_2 - p_U) \cdot A$$

$$F_N = (804000\,Pa - 98000\,Pa) \cdot \left(\frac{0.1\,m}{2}\right)^2 \cdot \pi = 5545\,N$$

Ü 6.3 Berechnung von Wellenleistung P und geleistete Wellenarbeit nach $\Delta t = 30$ Minuten Betrieb mit konstanter Drehzahl

Der Motor überträgt bei einer Drehzahl von $n = 2700\ \mathrm{min}^{-1}$ ein Drehmoment von $M_W = 392\ \mathrm{Nm}$.

Wellenleistung P

$$P = M_W \cdot \omega = M_W \cdot 2 \cdot \pi \cdot n$$

$$P = 392\,Nm \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{2700\,\mathrm{min}^{-1}}{60} = 110835\,W = 110.835\,kW$$

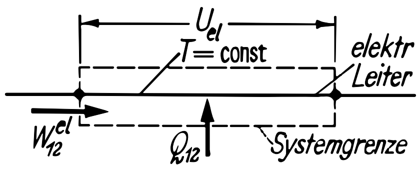
Geleistete Wellenarbeit nach $\Delta t = 30$ Minuten Betrieb mit konstanter Drehzahl

$$W_{W12} = P \cdot \Delta t$$

$$W_{W12} = 110835\,W \cdot 1800\,s = 199.5 \cdot 10^6\,Ws = 199.5 \cdot 10^6\,J = 55.42\,kWh$$

Ü 6.4 Kühlung eines elektrischen Leiters

Ein elektrischer Leiter wird von einem zeitlich konstanten Gleichstrom durchflossen. Der elektrische Leiter, der zwischen zwei Punkten mit dem Potentialunterschied $U_{el} = 15.5\ \mathrm{V}$ liegt, hat einen elektrischen Widerstand von $R_{el} = 2.15\ \Omega$. Durch eine entsprechende Kühlung wird die Temperatur des Leiters konstant gehalten.
Wieviel Energie muß innerhalb von $\Delta t = 1\ \mathrm{h}$ in Form von Wärme abgeführt werden?



Definition für die Wärme

$$Q_{12} = U_2 - U_1 - W_{12}$$

Da sich der Zustand, d.h. die Temperatur und somit die innere Energie des Leiters nicht ändert, gilt:

$$U_2 - U_1 = 0 \qquad (T = \text{const. !})$$

Die zugeführte Arbeit entspricht der zugeführten elektrischen Arbeit

$$W_{12} = W_{12}^{el} = U_{el} \cdot I_{el} \cdot \Delta t$$

mit

$$I_{el} = \frac{U_{el}}{R_{el}}$$

folgt

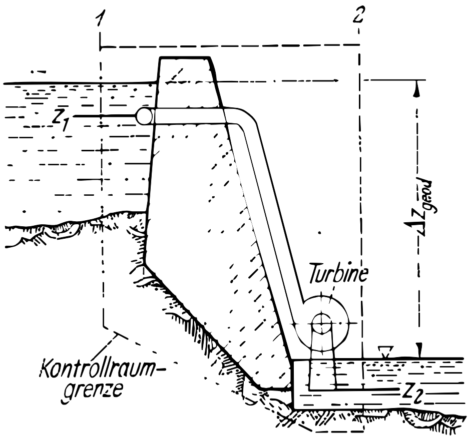
$$Q_{12} = -W_{12}^{el} = -\left(\frac{U_{el}^2}{R_{el}}\right) \cdot \Delta t$$

$$Q_{12} = -\left(\frac{15.5^2\,V^2}{2.15\,\Omega}\right) \cdot 3600\,s = -\,402.3\,kJ = -0.1117\,kW$$

Ü 6.5 Stationärer Fließprozeß am Beispiel eines Wasserkraftwerks

Die Grenzen des Kontrollraums werden so gewählt, daß die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers vernachlässigbar klein wird, d.h. $c_1 = c_2 \approx 0$. Der Luftdruck ist zu vernachlässigen und Zu- und Ablauf liegen in der gleichen Tiefe unter dem Oberwasser- bzw. Unterwasserspiegels, d.h. $p_1 = p_2$. Der Kontrollraum ist adiabat, d.h. $q_{12} = 0$. Wasser kann als inkompressibel angenommen werden, d.h. seine Dichte ρ bzw. spezifisches Volumen v ist konstant.

Gesucht ist die abgegebene Turbinenarbeit w_{t12}.



Der erste Hauptsatz für stationäre Fließprozesse

$$q_{12} + w_{t,12} = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} \cdot \left(c_2^2 - c_1^2\right) + g \cdot \left(z_2 - z_1\right)$$

vereinfacht sich somit zu

$$w_{t,12} = h_2 - h_1 + g \cdot \left(z_2 - z_1\right)$$

bzw.

$$w_{t,12} = u_2 - u_1 + \underbrace{\left(p_2 - p_1\right)}_{=0} \cdot v + g \cdot \left(z_2 - z_1\right)$$

also

$$w_{t,12} = \underbrace{u_2 - u_1}_{\textit{innere Energie}} + \underbrace{g \cdot \left(z_2 - z_1\right)}_{\textit{potentielle Energie}} = u_2 - u_1 - g \cdot z_{geodätisch}$$

Die abgegebene Turbinenarbeit setzt sich also zusammen aus der Änderung der inneren Energie sowie aus der Abnahme der potentiellen Energie des Wassers im Schwerefeld der Erde.

Für einen reversiblen Prozeß gilt $u_1 = u_2$, d.h. die innere Energie im System bleibt unverändert und die abgegebene Arbeit hängt lediglich von der Änderung der potentiellen Energie ab.

$$w_{t12,rev} = g \cdot \left(z_2 - z_1\right) = -\, g \cdot z_{geodätisch}$$

Dies stellt den theoretisch maximal erzielbaren Grenzwert für die abzugebende Turbinenarbeit dar. In der Natur kommen jedoch lediglich verlustbehaftete Prozesse vor, d.h. es gilt wegen der Reibungsverluste $u_2 > u_1$. Diese Verluste führen zu einer Verringerung der abgegebenen Turbinenarbeit und einer Erhöhung der inneren Energie des Wassers, d.h. zu einer Temperaturerhöhung des Wassers.

Der Wirkungsgrad des Kraftwerks läßt sich ausdrücken durch das Verhältnis

$$\eta = \frac{w_{t12}}{w_{t12,rev}}$$

Der Zusammenhang der Wassertemperatur mit seiner inneren Energie wird beschrieben durch

$$u_2 - u_1 = c_v \cdot (T_2 - T_1)$$

Mit $z_{geodätisch} = \Delta z$ und der Definition des Wirkungsgrades η folgt

$$\eta = \frac{w_{t12}}{w_{t12,rev}} = \frac{-g \cdot \Delta z + u_2 - u_1}{-g \cdot \Delta z} = \frac{-g \cdot \Delta z + c_v (T_2 - T_1)}{-g \cdot \Delta z}$$

berechnet sich die Temperaturerhöhung des Wassers aus

$$T_2 - T_1 = \frac{-\eta \cdot g \cdot \Delta z + g \cdot \Delta z}{c_v} = \frac{g \cdot \Delta z \cdot (1 - \eta)}{c_v}$$

Bei einem angenommenen Wirkungsgrad von $\eta = 0.9$ und einem Höhenunterschied von $\Delta z = 100\text{m}$ ergibt sich mit der spezifischen Wärmekapazität von Wasser $c_v = 4190$ J/kgK eine Erwärmung des Wassers von

$$T_2 - T_1 = \frac{9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 100\,m \cdot 0.1}{4190 \frac{J}{kg \cdot K}} = 0.023\,K$$

Ü 6.6 Abfüllen eines Kühlmittels R12 in eine Gasflasche

In einer Gasflasche mit dem Volumen $V = 0.002$ m³ befindet sich das Kältemittel R12 (CF_2Cl_2). Zu Anfang steht das gasförmige R12 bei $T_a = 20$°C unter einem Druck von $p_a = 1.005$ bar. Das zu T_a und p_a gehörige spezifische Volumen v_a beträgt $v_a = 0.1967$ m³/kg und die spezifische Enthalpie $h_a = 303.76$ kJ/kg. Zum Auffüllen wird die Gasflasche an eine Leitung mit gasförmigem R12 angeschlossen mit $p_1 = 6.541$ bar, $T_1 = 50$°C, $h_1 = 315.94$ kJ/kg.

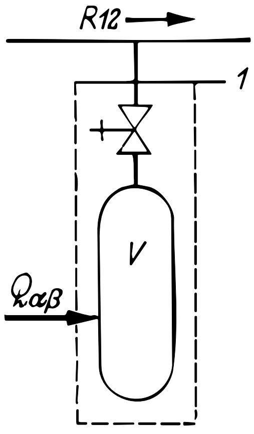
Auszug aus der Dampftafel von **R12** für $T_s = 20$**°C**

T_s [°C]	p_s [bar]	v' [m³/kg]	v'' [m³/kg]	h' [kJ/kg]	h'' [kJ/kg]
20.0	5.691	$0.7528 \cdot 10^{-3}$	0.03102	153.73	296.78

Die Flasche wird so aufgefüllt, daß bei 20°C gerade 80% des Volumens von siedendem R12 und das restliche Volumen von gesättigtem Dampf eingenommen wird.

Welche Menge an R12 sind einzufüllen und wieviel Wärme muß während des Füllvorgangs über eine Kühlung abgeführt werden?

Ü 6.6 Abfüllen eines Kühlmittels R12 in eine Gasflasche



Die Masse m_a des gasförmigen R12 zu Beginn des Füllvorgangs berechnet sich zu

$$m_a = \rho_a \cdot V = \frac{1}{v_a} \cdot V = \frac{1}{0.1967 \frac{m^3}{kg}} \cdot 0.002\, m^3 = 0.0102\, kg$$

Die Masse m_b am Ende des Füllvorgangs läßt sich aus den Massen der siedenden Flüssigkeit m' und des gesättigten Dampfes m'' bestimmen.

$$m_b = m_b' + m_b'' = 0.8 \cdot V \cdot \frac{1}{v'} + 0.2 \cdot V \cdot \frac{1}{v''} = 0.002 \cdot \left(\frac{0.8}{0.7528 \cdot 10^{-3}} + \frac{0.2}{0.03102} \right) = 2.138\, kg$$

Die einzufüllende Menge beträgt somit

$$m = m_b - m_a = 2.138\, kg - 0.0102\, kg = 2.128\, kg$$

Da nur ein Stoffstrom die Systemgrenze überquert, d.h. $dm_2 = 0$, gilt:

$$dQ + dW_t + \left(h_1 + \frac{c_1^2}{2} + g \cdot z_1 \right) \cdot dm_1 = dE$$

Die kinetische und potentielle Energien können vernachlässigt werden. Während dem Füllvorgang wird dem System keine Arbeit zugeführt, d.h. $dW_t = 0$. Die Änderung der Energie dE entspricht der Änderung der inneren Energie dU des R12, das sich in der Gasflasche befindet. Die Energiebilanz vereinfacht sich somit zu

$$dQ + h_1 \cdot dm_1 = dU$$

$\Leftrightarrow$

$$dQ = -h_1 \cdot dm_1 + dU$$

Die Integration

$$\int_a^b dQ = \int_a^b -h_1 \cdot dm_1 + \int_a^b dU$$

ergibt wegen des zeitlich konstanten Zustands des einströmenden Kühlmittels R12

$$Q_{ab} = -h_1 \cdot (m_b - m_a) + U_b - U_a$$

Ü 6.6 Abfüllen eines Kühlmittels R12 in eine Gasflasche

Die innere Energie des gasförmigen R12 vor dem Füllen beträgt

$$U_a = m_a \cdot u_a = m_a \cdot \left(h_a - p_a \cdot v_a\right)$$

$$U_a = 0.0102\,kg \cdot \left(303.76\,\frac{kJ}{kg} - 1.005 \cdot 10^5\,Pa \cdot 0.1967\,m^3\right) = 2.897\,kJ$$

Am Ende des Füllvorgangs beträgt die innere Energie des Naßdampfes

$$U_b = m_b' \cdot u_b + m_b'' \cdot u_b = m_b' \cdot \left(h' - p_s \cdot v'\right) + m_b'' \cdot \left(h'' - p_s \cdot v''\right)$$

$$U_b = m_b' \cdot h' + m_b'' \cdot h'' - p_s \cdot \underbrace{\left(m_b' \cdot v' + m_b'' \cdot v''\right)}_{V}$$

mit

$$m_b' = 0.8 \cdot V \cdot \frac{1}{v'} = 0.8 \cdot 0.002\,m^3 \cdot \frac{1}{0.7528 \cdot 10^{-3}\,\frac{m^3}{kg}} = 2.125\,kg$$

$$m_b'' = 0.2 \cdot V \cdot \frac{1}{v''} = 0.2 \cdot 0.002\,m^3 \cdot \frac{1}{0.03102\,\frac{m^3}{kg}} = 0.013\,kg$$

folgt

$$U_b = 2.125\,kg \cdot 153.73\,\frac{kJ}{kg} + 0.013\,kg \cdot 296.78\,\frac{kJ}{kg} - 5.691 \cdot 10^5\,Pa \cdot 0.002\,m^3 = 329.4\,kJ$$

Die während dem Füllvorgang abzuführende Wärme ergibt sich zu

$$Q_{ab} = -315.94\,\frac{kJ}{K} \cdot \left(2.138\,kg - 0.0102\,kg\right) + 329.4\,kJ - 2.897\,kJ = -345.8\,kJ$$

Das bedeutet, daß die Gasflasche während dem Füllvorgang gekühlt werden muß, um eine konstante Temperatur von 20°C aufrecht zu erhalten und das eingefüllte Gas kondensiert.